Rozpoczynamy dzisiaj wykłady mechaniki ciał sprężystych, które będą obejmowały oprócz właściwej teoryi sprężystości także mechanikę cieczy i gazów (hydromechanikę i aeromechanikę) i także akustykę, którą można uważać jako specyalną gałęź mechaniki. ~~Tworzą~~ będą one niby tworzyły dalszy ciąg wykładów przeszłorocznych o mechanice ciał sztywnych, i wogóle oddział specyalny dłuższego t. j. trzechletniego lub czteryletniego kursu, podczas którego zamierzam wykładać wszystkie główne części fizyki matematycznej. Naturalnie pojedyncze oddziały tego kursu będą niezależne od siebie, więc jeżeli np. tego roku będę się musiał ~~odwoływać do zasad~~ zasad ~~fizy~~ mechaniki ciał sztywnych, to na nowo je będę objaśniał. Pod tym względem więc te kursa nie będą wymagały żadnych specyalnych wiadomości przedwstępnych, inaczej pod względem matematyki. Fizykę teoretyczną absolutnie nie można uprawiać bez używania rachunku różniczkowego i całkowego. Wprawdzie ~~będę~~ ~~wystrzegał~~ nie będziemy wyprawiali żadnych sztuczek matematycznych i będę się starał objaśnić każdym razem w sposób jak najdostępniejszy owe niezbędne minimum wzorów i metod matematycznych które będziemy używali, ale przecież myślę że Panom którzy nie mają przynajmniej jakiegoś wyobrażenia – ~~jak to takie bardzo~~ niech będzie zresztą bardzo niejasne –

o matematyce wyższej, trudności będą zanadto wielkie, więc nie ~~[illegible]~~ radziłbym Panom z pierwszego roku zapisać się na te kursa, którzy przychodzą wprost z gimnazyum ~~[illegible]~~ oprócz jeżeli może przypadkiem trochę zapoznali się z matematyką wyższą.

Ale wogóle proszę ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Panów jak najusilniej żebyście ~~[illegible]~~ mnie robili uwagi kiedykolwiek coś z wykładów nie byłoby zupełnie jasnem, i żebyście Panowie się do mnie udali kiedykolwiek by Wam się nastręczały jakieś trudności w zrozumieniu przedmiotu.

Wykłady fizyki teoretycznej wogóle pod pewnym względem wiele ważniejsze są od innych wykładów. Mianowicie nie mamy prawie żadnych podręczników fizyki teoretycznej w języku polskim; mamy tylko mechanikę Frankego, małą książeczkę Fabiana i wstęp do fizyki matematycznej Natansona, który tyczy się tylko szczególnej części fizyki t.j. termodynamiki; podczas gdy co do innych umiejętności ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ matematyki, chemii, także ~~[illegible]~~ fizyki doświadczalnej mamy podręczniki zupełnie wystarczające, czasem nawet doskonale napisane. Więc w ~~tym przed~~ naszym przedmiocie Panowie będą ograniczeni (po największej części) na ~~[illegible]~~ podręczniki w obcym języku napisane mianowicie niemieckie, które naturalnie jeszcze trudniej zrozumieć niż polskie — i na wykłady.

Więc trzeba wielkiego starania dokładać żeby ~~wszystkie~~ wykłady zrozumieć i przetrawić, żeby wypisy mieć w porządku, to potem przy egzaminach

zasad więcej pewnych (~~opór może w energetyce~~) ale właśnie ciał sztywnych t. j. ~~idealnie~~ doskonale sztywnych nie ma w przyrodzie. Każde ciało pod działaniem sił zmienia do pewnego stopnia swój kształt i także te odkształcenia zwykle stosunkowo bardzo małe, których zbadaniem właśnie zajmuje się teorya sprężystości, trzeba uwzględnić przy dokładnem opisaniu zjawisk ruchu ciał. Zostając przy naszym przykładzie możnaby przytoczyć (Co do tego punktu np.) w nowszych czasach powstałe badania Thomsona, Darwina i innych co do zmienności kształtu ziemi wskutek przyciągania księżyca i słońca. Także ziemia nasza nie jest idealnie sztywna, tylko do pewnego stopnia wydłuża się w kierunku przyciągania księżyca i słońca



; choć naturalnie to wydłużenie bardzo jest nieznaczne; następuje zjawisko podobne do ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ przypływu i odpływu morza ale ~~[illegible]~~ mniej ~~się~~ wyraźne niż tamto.

Pierwszemi dwoma oddziałami mechaniki t. j. mechaniką punktu i ciał sztywnych zajmowaliśmy się przeszłego roku, teraz więc następuje bliższe zbadanie zmienności kształtu ciał następującej w skutek działania sił zewnętrznych, będziemy się zajmowali teoryą sprężystości.

W mechanice zatrzymujemy stary podział na mechanikę ciał sztywnych, sprężystych i.t.d. ~~Jest on~~ Polega on właściwie na ~~zasadzie~~ metodzie ogólnej ~~którą~~ się trzymamy w badaniach przyrody t.j. na metodzie przybliżenia stopniowego „der successiven Annäherung". Tak mówiąc w mechanice najpierw mechanikę punktu materyalnego. Punkt materyalny nie występuje w rzeczywistości jest to pojęcie oderwane, ale używamy je ~~tt~~ aby uprościć nasze rozumowania gdy nam nie chodzi o to że ciało jakkolwiek małe ma jeszcze pewne rozmiary. Tak np. także w astronomii jeżeli rachujemy kształt drogi planet i komet etc. ~~wcale~~ używamy mechaniki punktu. O jeden stopień przybliżamy się dalej do rzeczywistości jeżeli uwzględniamy ~~ro~~ kształt i rozmiary ciała poruszającego się, zawsze jednak uważając kształt jako niezmienny — powstaje mechanika ciał sztywnych.

Badania nad kształtem ziemi, nad ~~[illegible]~~ jej obrotem koło pewnej osi, nad ~~położeniem tej osi~~ zmiennością położenia tej osi, którą określamy przez precesyę i nutacyę i.t.d. ~~należą do~~ są ~~[illegible]~~ przykładami tego rodzaju rozumowań.

Ale także mechanika ciał sztywnych jest tylko obrazem idealnym, który nie odpowiada dokładnie rzeczywistości. Nie żeby zasady mechaniki nie były ~~dokładne~~ ścisłe — aż dotąd w fizyce nie mamy

nam się dawniej nie śniło n. p. elektryczności, magnetyzm etc., których nie poznajemy bezpośrednio jakimś osobnym zmysłem, więc najlepiej że zupełnie porzucimy ów ~~stanowisk~~ pogląd naiwny i że nie dzielimy zjawiska fizyczne według tego czy właśnie przypadkowo człowiek ma zmysł odpowiedni, tylko według związków ~~w~~ teoretycznych między różnemi ich gałęziami. Tak n.p. poznajemy że optyka jest tylko specyalnym przypadkiem elektryczności tj. takim gdzie długość fali elektrycznej wynosi ~~koło~~ 0·0006 do 0·0003 mm, więc przydzielamy optykę do elektryczności a podobnie akustykę do mechaniki. Akustyka teoretyczna miałaby ~~[illegible]~~ racyę istnienia jako część mechaniki t.j. jako nauka o małych drganiach ciał (~~[illegible]~~) materyalnych także gdyby wszyscy ludzie byli głusi. Nauka o współdźwięku i rozdźwięku, o harmonii etc. naturalnie nie istniałaby, ale ta także właściwie nie należy do fizyki tylko do fizyologii. Tylko ze ~~wzg~~ względów praktycznych zajmujemy się temi zjawiskami we fizyce doświadczalnej, we fizyce teoretycznej ~~[illegible]~~ z niemi wcale nie mamy do czynienia

Więc pozostaje nam podział na 3 wielkie grupy: mechanikę, elektryczność na podstawie teoryi Maxwella, i ciepło, (przyczem ewentualnie ~~[illegible]~~ i ~~[illegible]~~ te dwie grupy (~~może~~ będzie ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ wreszcie zredukować na mechanikę). ale tymczasem jeszcze związek ten nie jest dosyć szczegółowo wyjaśniony.

się przyda i dużo pracy oszczędzi.

Wspomniałem już że (w przeciągu trzech lub czterech lat) zamierzam ~~wyłoż~~ ~~[illegible]~~ skończyć całkowity wykład fizyki matematycznej. Zaczęliśmy mechaniką, w przyszłym półroczu ~~przyjdzie~~ nastąpi może teorya potencyału, na przyszły rok elektryczność i optyka, w trzecim roku termodynamika. Jest to podział różniący się już nieco od podziału zwykłego, jaki n.p. napotykamy ~~wykł~~ w ~~[illegible]~~ podręcznikach gimnazyalnych.

~~Tutaj opuścimy tradycyę historyczną i nie podzielimy fizykę według zmysłów przez które poznajemy zjawiska zewnętrzne~~, tylko ~~według~~ Tam w gimnazyum przez tradycyę historyczną i przez pewien konserwatyzm został przechowany pogląd na świat, który możnaby nazwać naiwnym t.j. który uważa człowieka jako środek świata i dzieli zjawiska świata zewnętrznego według tego jak się jego zmysłom przedstawiają. Co wąchamy i co czujemy podniebieniem należy do chemii, co widzimy do optyki, co słyszymy do akustyki, ruchy ciał i siły ~~[illegible]~~ które poznajemy n.p. przez uczucie w mięśniach ciała naszego należą do mechaniki, ~~a zjawiska ciepła o których istnieniu dowiadujemy się zapomocą zmysłu ciepła~~ ~~należą do~~ a oprócz tego zmysł dotykania zapoznaje nas z jeszcze innym rodzajem zjawisk z ciepłem. To jest ~~dawniejszy~~ stary sposób podziału.

Teraz poznaliśmy że egzystuje jeszcze mnóstwo różnych zjawisk, których

Takie ~~to~~ gimnazyum zajmujemy się prawie wyłącznie prawami statyki i stąd pochodzi że ~~[illegible]~~ pogląd że mechanika jest nudna. Właśnie interesujących części kinetyki, nauki o ruchach ciał nie można wykładać, bo wymaga ona rachunku wyższego.

Nie mamy czasu specjalnie się zajmować ~~[illegible]~~ historią mechaniki Mach Geschichte der Mechanik.

Zaczniemy mechanikę punktu przy czem zaraz poznamy pojęcia zasadnicze wyższej matematyki.

nie mamy. Oprócz wstępu Natansona, Fabiana, Frankego

które Panom jak najmocniej polecam, nie mamy żadnych podręczników

polskich, więc ~~jesteś~~ Panowie będą ograniczeni na książki niemieckie

z powodu języka naturalnie znacznie trudniej zrozumiałe – i stąd nie na wykłady

Wspomniałem już   rozkład na 4 lata

inny niż w gimnazjum, tam naiwny tu krytyczno-teoretyczny

np. akustyka do mechaniki, optyka do elektryczności

wykład mechaniki: ~~ciał stał~~ punktu, ciał sztywnych, ciał sprężystych

polega na (~~zasadzie~~ metodzie) przybliżenia stopniowego

Punkt.

Podobny i w całości rozwój historyczny mechaniki

punktu: Galilei Newton 1642

ciał sztywnych: Lagrange, Euler, ~~Ha~~ Poinsot etc

~~ciał~~ sprężystych: Poisson, Navier, Stokes
i hydromechanika

nie ~~[illegible]~~ wspomniałem wcale o poprzednikach Galileusza, ~~wszak i ci wiedzieli~~

oni znali tylko statykę, to nie jest osobny oddział mechaniki tylko szczególny

przypadek, gdzie ruch = 0

Olbrzymia przewaga mechaniki w fizyce tłomaczy się zatem rozwojem historycznym.
Czy ten rozwój histor. zaś tylko przypadkowy

To jest rzeczą ~~...~~ zupełnie zrozumiałą że w ten sposób badanie fizyczne postąpiły bo oczywiście zjawiska ruchu są zjawiskami najlepiej w oko wpadającemi i najłatwiej uwagę na siebie mogą zwrócić.

Podczas gdy światło, głos, ciepło oddziaływa bezpośrednio ~~tylko~~ na ~~...~~ oko, ucho, dotyk to ruchy ciał zjawiają się równocześnie oczom i zmysłowi dotyku. A co najważniejsze: sami zapomocą ~~...~~ członków naszego ciała ciągle wykonujemy eksperymenta mechaniczne. To są z pewnością ~~...~~ pierwsze doświadczenia fizyczne małego dziecka i z pewnością także dorosły najlepiej z niemi jest obeznanym.

Nic dziwnego że statyka w głównych zarysach już znaną w starożytności. Zapewne także dzikie ludy znają zasady dźwigni, klinu, zjawiska sprężystości, tarcia etc., choć nie umieją sformułować tych wiadomości w sposób ścisły matematyczny.

W ogóle starożytni byli nadzwyczaj jednostronnemi w swych badaniach. Mianowicie skłonności greków do dyalektyki, retoryki, do gadania filozofowania i spekulowania bez żadnych podstaw faktycznych nie nadawało się bynajmniej do badań fizycznych. Zamiast wykonać najprostsze doświadczenie, woleli tworzyć o tem pisać i bajdurzyć jakby to mogło być. Nic do wierzenia np. że Zenon zaprzeczał wogóle możliwości ruchu. Także Arystoteles wskutek swych przesądów metafizycznych nie doszedł daleko. Ale u Archimedesa znajdujemy już świetne badania statyki metodami geometrycznemi, zna on już zasady dźwigni, klin, bloków etc etc, oblicza

Archimedes 287–212 a.C. 6

środki ciężkości, zna podstawy hidrostatyki etc.

Co do dynamiki, co prawda, mieli wyobrażenia bardzo śmieszne — bo to wymaga dokładniejszej obserwacji i sztuki doświadczalnej

patrz n.p. Franke XIV

N.p. Arystoteles: dzielił ruchy w gwałtowne czyli wbrew naturze i naturalne (lekkie i ciężkie)

gwałtowne muszą się wyczerpać; tylko dopóki dotyka to co go porusza (lub ośrodek);

najdoskonalszy ruch: po kole

Ruch ciała rzuconego postępuje aż wyczerpie się, potem prosto spada etc.

Całe czasy średniowieczne dla nauki stracone, gdzie jedynym źródłem poznania była ~~lektura~~ wiara w autorytet ojców świętych i Arystotelesa, a każda myśl samodzielna uważana za zbrodnię, nie mogły się przyczynić do rozwoju, tylko wytworzyły w nauce scholastyczny ~~tępy~~ przypominający konserwatyzm chiński

Dopiero ~~[illegible]~~ czasy odrodzenia znaczą początek nowej epoki.

Jako wielkie odkrycie uznano pomysł że zamiast odczytywać i szperać po książkach Arystotelesa za prawami przyrody wiele prostszą rzecz: spróbować doświadczenia (Bacon)

Leonardo da Vinci 1452–1519: teorie maszyn, prawa uderzenia, tarcia, prace hydrostatyczne prawdziwie renesansowa postać; muzyk, malarz, rzeźbiarz, architekt, inżynier, obyty w sztukach wszystkich i innych.

prace nie ~~[illegible]~~ ogłoszone, częściowo uprzedził Galil.

Galileusz 1564–1642: ~~[illegible]~~ prawa spadania,

Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze

niezależność ruchów równoczesnych, (Tylko de Motu przemknęło się)

wprowadził pojęcie bezwładności

Torricelli, Stevinus, Huyghens: teoria wahadła (cykloidowe, fizyczne etc.)

Horologium oscillatorium 1673

Newton 1642–1727 Philosophiae naturalis principia math. bez figur!

Bernoulli, Euler, D'Alembert, Lagrange ujednostajnienie metody analitycznej Mécanique analytique 1788, 1811

Tak za Newtona już mechanika ciał osiągnęła względnie znaczną, podczas gdy w innych działach fizyki będzie początki

Lagrange Mécanique analytique 1788 systematyczny wykład

Tu już mechanika ciał sztywnych jest klasyczną nauką, zasady hydrodynamiki

podczas gdy wszystkie inne części fizyki jeszcze w początkach

Optyka (interf. polaryz. uginanie Fresnel

Ciepło (przewodzenie Fourier, termodynamika w pół wieku)

Elektr. (indukcya Maxwell ...)

Nic dziw że we wszystkich wzorowano się na mechanice i starano się wyjaśnić

ostatecznie mechanizmem, i to dostatecznie tłumaczy rozwój tego przedmiotu.

(Ruchy utajone, mechanizmy utajone Hertza)

Hamilton Jacobi

1). Podział na statykę i ~~dynamikę~~ [...] (Lagrange) nie bardzo racyonalny i dziś już nie używany

2). Na kinematykę (x, y, z, t) i dynamikę ~~kinetykę~~

(Kinematyka punktu, ciał sztywnych, ciał sprężystych etc.)

3). Na mechanikę ~~punktu~~ ciał sztywnych i ciał niesztywnych ~~sprężystych, i hydrodynamika~~

punktu, układu, ciał st[ałych] — sprężystość, hydro, aero, akustyka

Pojęcie prędkości i przysp.:

Ruch prostolin.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$w = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Dodawanie ruchów w tym samym kierunku (trottoir roulant)

$$s = a + b \sin \alpha t$$

$$\frac{ds}{dt} =$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} =$$

~~Przystępujemy teraz do~~

Jako przedmiot wykładów tegorocznych obrałem mechanikę ciał sztywnych, t. j. ~~część~~ ~~[illegible]~~ którą słusznie możnaby uważać jako część najważniejszą fizyki teoretycznej i ~~która~~ od której racyonalne studyum fizyki musi się rozpocząć ~~mechaniką~~, gdyż ona tworzy jej podstawę. ~~dla całej teoretycznej naszej fizyki~~.

Przypuszczam iście Panowie posiedli z czasów gimn. mniej korzystne wyobrażenie o mechanice t. j. że ~~Panowie zapewne z gimnazyalnych czasów także posiedliście jeszcze wyobrażenie (przesąd)~~ przypominacie sobie mechanikę ~~jest częścią~~ jako część najsuchszą najnudniejszą ~~fizyki~~ najmniej interesującą fizyki. Jest to przesąd, pochodzący z tego, że w gimnazyum musimy się ograniczać na części mechaniki dostępnej dla matematyki elementarnej, t. j. na statykę, a o części najważniejszej i prawdziwie interesującej t. j. o dynamice nie możemy tam pojąć ani wyobrażenia, gdyż ona wymaga bezwarunkowo znajomości t. j. wiadomości rachunku różniczkowego i całkowego.

zresztą Wielkich wymagań pod tym względem t. j. co do wiadomości matematycznych w moich wykładach czynić nie ~~będę~~ mogę, myślę że ~~wykłady~~ będą one dostępne dla każdego, kto posiada wiadomości ogólne o pochodnych różnych rzędów i o całkach najprostszych; zresztą ~~jak powie~~ proszę powtarzam Panów ~~[illegible]~~ udać się do mnie ~~jeżeli~~ kiedy in coś nie miałby jasnem.

Spodziewam się więc że i Panowie ~~gdy raz wstępne ...~~ przekonacie się z czasem że mechanika należy do części najwięcej zajmujących fizyki, ~~Dawniej do mechaniki zaliczać można było także prawie całą astronomię~~ ponieważ ona jedyna jest we związku z innymi działami fizyki i tworzy niejako ich podstawę. ~~A słusznie rozpoczynać należy studya fizyki mechaniką, tej nauki o ruchu ciał, gdyż tutaj zastosowanie matematyki do fizyki dotąd najdalej jest rozwinięte.~~ Więc Żadna inna część fizyki nie nadaje się tak bezpośrednio do badania teoretycznego matematycznego, i w żadnej innej nie wyrobi nauczy się tak łatwo sztuki najważniejszej dla fizyka t.j. ~~sztuki~~ zdolności przedstawienia sobie praw przyrody pod postacią wzorów matematycznych i odwrotnie: wyciągania wniosków najściślejszych co do rzeczywistości z naszych ~~form~~ rachunków.

Z tego powodu też mechanika najpierwej się rozwinęła. Newton wygłosił prawa ogólne mechaniki, te same które teraz jeszcze posiadamy, gdy w innych częściach fizyki jeszcze najprostszych zasad nie znano. Optyka, ciepło, elektryczność, magnetyzm w ogóle prawie dopiero w naszym stuleciu zostały lepiej poznane, gdy mechanika już dawno (teoretyczny system całkowicie wykończony.)

A z tego pochodzi, że mechanika nadała cechę całej naszej fizyce. Newton nauczył nas pojęcia siły t.j. iloczynu z masy i przyspieszenia $m\frac{d^2x}{dt^2}$, które okazało się tak ważnem w teoryi grawitacyi i ~~elastyczności~~ sprężystości; t.j. tych dwu gatunków sił, które za jego czasów znano, tak że potem starano się i

~~Kilkoma słowami chciałbym przy tej sposobności wyjaśnić~~ czemu tak jest i czemu sądzę że studyum mechaniki musi poprzedzić, ~~jako~~ inne części fizyki; ~~jako ich podstawa~~ chciałbym przy tej sposobności kilkoma słowami ~~objaśnić~~ wyjaśnić.

Mechanika, t.j. nauka o ruchu, ~~dlatego~~ zajmuje takie wyjątkowe stanowisko z dwuch przyczyn; po pierwsze bo pojęcia na których się opiera t.j. czas i przestrzeń najprostszemi nam się wydawają a ~~nietylko zmysł zwr~~ podczas gdy co do zjawisk optycznych, akustycznych, cieplnych ograniczeni jesteśmy na wrażenia jednego zmysłu — wzroku, słuchu, i.t.d. — to własności przestrzeni poznajemy nie tylko przez wzrok, ale też przez bezpośrednie macanie, dotykanie się, przez uczucie w mięśniach naszych, gdy się poruszamy, a dlatego one nam się wydawają łatwiej zrozumiałe, pierwotniejsze.

Druga przyczyna przewagi mechaniki jest, że w żadnej innej części fizyki ~~nie nadaje się tak bezpośrednio do~~ zastosowanie matematyki do fizyki nie jest tak łatwo zrozumiałem. ~~Położenie~~ Ruch jakiegoś punktu bezpośrednio możemy oznaczyć liczbami; w tym momencie jest on oddalony 1 dm od punktu odniesienia, teraz dwa razy, teraz trzy razy tak daleko etc.

Tymczasem n.p. przy zjawiskach cieplnych rzecz nie jest tak prosta; możemy rozstrzygnąć do pewnego stopnia samem uczuciem, które ciało cieplejsze a które zimniejsze ale nie możemy powiedzieć czy temperatura jego dwa razy lub 3 razy etc. wyższa od innej. To nie miałoby żadnego sens

w innych częściach fizyki ~~..~~ zjawiska fizyczne ~~..~~ sprowadzić na działaniu takich sił (poznanych w mechanice). W ten sposób ~~objęto siły~~ (udało się wytłomaczenie zjawisk) elektrycznych i magnetycznych, sprowadzając je na ~~siły~~ (działanie) elektryczno-magnetyczne, które tak samo wywołują przyspieszenia jak owe siły, które pod pewnymi doświadczalnie poznanymi warunkami powstają.

Wobec zjawisk cieplnych pojęcia ~~fizyki~~ siły nie można było użyć, ciepło ~~uważając~~ uważano jako coś ~~szczególnego~~ odrębnego, jakiś agens, fluidum, aż Joule, Robert Mayer i inni wykazali że ciepło jest w najbliższym związku z innem pojęciem ~~..~~ wziętem z mechaniki t.j. z tak zwaną energią kinetyczną $\frac{mv^2}{2}$, pojęciem wprowadzonem do nauki przez Huygensa i Leibnitza, i odtąd dopiero teorya ciepła ogromnie się rozwinęła.

Równocześnie inny oddział fizyki t.j. akustyka, wprowadziła znów nowe poglądy mechaniczne w części fizyki, które niby nic mają z mechaniką nic wspólnego. Jest to pojęcie tak zwanych ruchów ukrytych, ~~są to ruchy~~ których nie widzimy ~~bezpośrednio~~ naocznie (z powodu drobności cząsteczek, lub szybkości ruchu) ~~np. falowanie powietrza~~, ~~lecz~~ które jednak supponujemy, aby wytłomaczyć zjawiska ~~zmy~~ zmysłowe innych zmysłów np. akustyczne (gdzie tłomaczymy zjawiska głosu falowaniem powietrza).

W tym wypadku rzecz zdaje się być jeszcze bardzo naturalną i prostą, gdyż czasami nawet naocznie widzieć możemy drgania ciał wydających głosy (możemy się przekonać o istnieniu do pewnego) ~~stopnia~~ falowania powietrza. Ale ten sam sposób wytłomaczenia dał się użyć także do ~~wytłomaczenia~~ zjawisk optycznych. Powstała teorya gdzie już naszymi oczyma bezpośrednio nie można rozpoznać

11 6

optyczna Fresnela, sprowadzającą światło do ~~drgań~~ ~~eteru~~ (ruchu drgającego lub falującego cząsteczek eteru.

To pojęcie ruchów ukrytych nadzwyczaj stało się ważnem. Wraz z analogią już wspomnianą między ciepłem i energią kinetyczną doprowadziło ono do ~~[illegible]~~ teoryi kinetycznej ~~[illegible]~~ gazów i wogóle materyi, ~~a później przez Maxwella, Boltzmanna i innych zastosowane zostało i do elektryczności~~, tak ~~że teraz~~ można teraz prawie całą fizykę teraźniejszą — o ile dokładnie jest zbadana — wytłomaczyć mechanicznie t.j. zapomocą ruchu i sił niewidzialnych cząsteczek materyi lub eteru. ~~Można teraz~~ Możemy teraz — jak Planck to uczynił w swoich wykładach przed kilku laty — ustawić ogólny system mechaniczny całej fizyki. Rozpocznie~~my~~ się od (równań) Hamiltona, z nich wyprowadzi~~my~~ się po kolei jako szczególne wypadki zjawiska cieplne, elektryczne i.t.d.

Ale nietylko że udało się streścić prawa dawniej już znane pod potęgą mechaniczną, ale nawet nadzwyczaj często, szczególnie w teoryi kinetycznej gazów udało się teoretycznie ~~zapomocą naszych~~ na podstawie naszych teoryj mechanicznych odkryć ~~prawa~~ a priori zjawiska dawniej nieznane * i dopiero potem sprawdzane (jak ciepło właściwe gazów jednoatomowych, przewodnictwo ciepła przez gazy itd.) doświadczalnie, co naturalnie ogromnie przemawia na korzyść tych teoryj mechanicznych.

która tłomaczy sprężystość ciał, rozszerzanie się ich z ciepłem, różne ich stany skupienia i.t.d. za pomocą ruchów niewidocznych molekułów czyli drobin, i która w naszych czasach tak znakomicie się rozwinęła, a to samo pojęcie ruchów ukrytych później zostało i do elektryczności i magnetyzmu zastosowane przez Boltzmana i Maxwella którzy pokazali że i zjawiska te ~~elektromagnetyczne~~ można wytłomaczyć za pomocą układu pewnego ruchomego cząsteczek t. zwanego eteru.

Muszę tu jednak dwa uczynić zastrzeżenia. Po pierwsze zawsze naturalnie pozostały jeszcze pewne mniejsze części fizyki, w których nie zdołano jeszcze przeprowadzić owego ogólnego poglądu mechanicznego. To nas naturalnie nie może dziwić, gdyż również wiele jest części fizyki ~~jeszcze~~ gdzie w ogóle nie znamy jeszcze praw zasadniczych n. p. fluorescencya promienie Röntgena etc. Z czasem w tem dalej postąpimy.

Ale dodam drugie zastrzeżenie, ważniejsze, t. j. że nie chcę twierdzić, jak się to często czyta i słyszy, że mechanika albo powiedzmy że ruch jest jedyną rzeczą rzeczywiście istniejącą i że wszystkie inne zjawiska są tylko formami ruchu. Co rzeczywiście istnieje, czy ~~ruch~~, elektryczność, czy ruch, czy coś co jeszcze jest różnym od ruchu, tego nie wiemy, i to nas jako fizyków też wcale nie obchodzi. My jesteśmy zadowoleni, nasze zadanie jest spełnione jeżeli znamy zjawiska fizyczne, warunki pod którymi one zachodzą i jeżeli mamy system ogólny, który dozwala wywieść je z najprostszych założeń. A takim teraz dla nas zdaje się być system mechaniczny. Możebyć że gdyby ktoś przed Newtonem był zbadał zjawiska elektryczne, że teraz mielibyśmy teoryę elektryczną mechaniki albo w ogóle system elektryczny fizyki. Ale tak nie stało się. Rozwój historyczny fizyki nastąpił w sposób naturalniejszy, sprowadzając inne zjawiska fizyczne do mechaniki gdyż zjawiska ruchu dla ~~nas~~ naszych zmysłów są najjaśniejsze i dla tego dla umysłu naszego zdają się być najwięcej zrozumiałemi.

Rozwodzić się tu możnaby obszernie ~~dokładnie~~ nad temi kwestyami, ale ~~[illegible]~~ wszystkim to

tylko aby Panów przekonać że mechanika nie jest nudną i suchą przeciwnie nadzwyczaj zajmującą jeśli się zapatruje nań z punktu widzenia ogólnego, filozoficznego, a po drugie że bez niej nie ma reszty fizyki, że ona tworzy fundament do jej zrozumienia.

Chętniebym obszerniej pomówił jeszcze o rozwoju historycznym samej mechaniki, ale niestety czas mi na to nie pozwoli; muszę się ograniczyć na to aby Panom zarekomendować do tego jak najmocniej znakomitą książkę, nadzwyczaj interesującą i dobrze, łatwo zrozumiale napisaną, Macha: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch kritisch dargestellt", która chyba każdego przekona, ~~jak~~ że i książki naukowe mogą być tak zajmujące jak romanse.

Kilka słów zresztą o tem mogę jeszcze powiedzieć.

W starożytności i w średnich wiekach znano ~~znano~~ tylko statykę. O ruchu ciał miano najdziwaczniejsze wyobrażenia n.p. podzielano ruchy w ruchy naturalne n.p. spadanie ciał i ruchy gwałtowne n.p. rzucanie ciał, myślano że ciała spadają z szybkością stosowną do ciężkości etc.

W nowoczesnej mechanice statyka atoli zajmuje bardzo upośledzone stanowisko. Otóż ona jest tylko przypadkiem szczególnym kinetyki t.j. takim jakie ruch wszystkich części równa się zeru, więc znając prawa ruchu znamy i tak już prawa spoczynku.

Galilei 1564–1642 pierwszy krok zrobił na polu kinetyki. Odkrył prawo spadania ciał. Równocześnie Keppler odkrył prawa, według których planety się poruszają — streszczone w znanych jego trzech prawach.

A Huyghens zbadał ruch wahadłowy

— używając [illegible] już wahadła jako regulatora w zegarach —

9/ To były tylko poszczególne [przykłady] przypadki ruchu. Newton (1642 –1727) ~~wygłaszał~~ nareszcie wygłosił ogólne prawa mechaniki, które objmowały te ruchy ówczas znane i które się dotąd uważamy jako fundament naszej fizyki. Warto zresztą — nawiasem mówiąc — zapamiętać sobie te dwie daty 1564, 1642 są one ważniejsze niż niejedna data historyczna, czas panowania jakiegoś króla, jakaś bitwy etc. bo mają największą doniosłość w ~~całej~~ historyi wiedzy ogólno ludzkiej. Pierwsza: rok, w którym Michał Anioł umarł — koniec epoki sztuki włoskiej — i w którym Galileusz się urodził. Druga rok w którym Galileusz umarł a Newton się urodził.

Gdy raz prawa ruchu Newtona były [znane] ~~zredukowane~~, mechanika była [właściwie] dana. Dalsza praca [ograniczała się] ~~polegała~~ już tylko do wypracowania szczególnych przypadków [co przedstawia już tylko matematyczne trudności] i do ~~sformułowania~~ przekształcenia tych praw w inne formy, które czasami łatwiej dają się zastosować niż pierwotne prawa. Pod tym względem szczególnie trzeba wspomnieć [nazwiska D'Alembert] Lagrange, Laplace Poinsot, Hamilton. Te Zasady D'Alemberta, Lagrange'a i Hamiltona później wiele bydowały ~~wiele~~ do czynienia.

Najnowsza epoka w mechanice zdaje się być krytyczna [lub „krytykująca" (objaśniająca się] ~~[illegible]~~ t.j. krytycyzmem zbadaniem jej zasad i wybudowaniem całego systemu w formie jak najwięcej logicznej i ścisłej. W tym kierunku [pracowali i pracują] szczególnie Mach, Hertz, Boltzmann.

W nowszych czasach zwykle dzielą mechanikę na kinematykę i kinetykę. Kinematyka jest nauką o ruchu punktów lub układów punktów bez względu na ich masę lub na siły działające, więc o ruchu czysto abstrakcyjnym. Kinetyka zaś powstaje, jeśli ~~zaraz~~ wprowadzamy pojęcie — wzięte z doświadczenia — masy i siły która na dany układ działa i ~~przez działanie~~ rzeczywisty ruch wywołuje.

Ma ten podział wiele za sobą i jest przeprowadzony n. p. w mechanice prof. Fabiana, prof. Frankego i także w zasadach fizyki Witkowskiego ale tutaj ze względów ~~praktycznych~~ dydaktyczno-praktycznych — t. j. dla tego bo zbyt ~~mało~~ ciasny ograniczony jest czas wykładów moich — nie będę się jego trzymał, ~~także~~ ponieważ przy każdem zadaniu mechanicznym będziemy i tak musieli także czynić rozważania kinematyczne. więc łatwo to da się pokazać.

Za to ze względów praktycznej ekonomii podzielimy nasz przedmiot na mechanikę punktu materyalnego, mechanikę układów punktów i mechanikę ciał sztywnych.

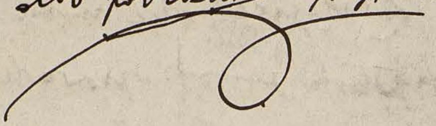
Co do kinematyki punktu ograniczamy się tymczasem na najprostsze pojęcia, później i tak zajdziemy do bardziej skomplikowanych przy innych sposobnościach.

Ruch punktu możemy opisać w symbolach matematycznych w różny sposób.

N. p. tak że podajemy kształt drogi na której się porusza

11

i zanotujemy w ilomożności wielu punktach czas gdy punkt tam przebywał; tak n.p. astronomowie postępują obserwując nowo odkrytą kometę, albo podróżnik ~~wyznacząc~~ zaznaczając drogę przebytą na mapie etc.



Matematycznie dokładny ten opis będzie dopiero, gdy potrafimy wyznaczyć równanie krzywej, na której punkt dąży t.j. jego drogi albo toru n.p. $y = f.(x)$ odniesioną do osi współrzędnych prostokątnych

jeżeli droga płaska i zarazem czas $t = f.(s)$ albo też $t = f(x)$, $t = f(y)$

lub odwrotnie $s = f(t)$ etc.

jeżeli droga podwójnie krzywa n.p. na kształt śruby $y = f(x)$ $z = f(x)$ $s = f(t)$

Znając te równania już łatwo wyznaczyć takie wielkości szybkości w danym punkcie.

W momencie t punkt znajduje się w $s = f(t)$

$t+\Delta t$ $\quad s+\Delta s = f(t+\Delta t)$

Wtedy $\frac{\text{droga}}{\text{czas}} \mid \frac{\Delta s}{\Delta t}$ = prędkość ~~średnia~~ przeciętna między punktami s i $s+\Delta s$

Jeżeli zmniejszymy długość drogi Δs w nieskończoność, to otrzymamy

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(t) = \dot{s}$$

↑ przyrost drogi odpowiedni do ~~nieskończenie mały~~ przez przyrost czasu ~~odpowiedni~~ nieskończ. mały

a to nazywamy prędkością (pochodna) w danym punkcie. [Geschwindigkeit, vélocité]

Będzie ona miała oczywiście kierunek stycznej do drogi w punkcie s, więc ~~stycznej~~ cosinus kąta utworzonego między styczną i osią X będzie $\frac{dx}{ds}$ $= \dot{x}$

Y $\quad \frac{dy}{ds}$ $= \dot{y}$

a w ruchu trzechrozmiarowym Z $\quad \frac{dz}{ds}$

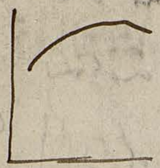
a więc prędkość w osi:

Ten sam ruch można przedstawić także tym sposobem

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$ } Także jeżeli tym sposobem w każdej chwili ~~odcięta~~ i rzędna są dane ruch całkiem ściśle jest oznaczony.

Można te 2 równania uważać już jako przykład najprostszy składania ruchów z dwóch ruchów prostopadłych w kierunku osi X i Y.

Wystawmy sobie n.p. że punkt odbywa ruch $y = \psi(t)$, $x = 0$ na tej tablicy t.j. ruch w kierunku Y, zwykle nie jednostajny



a zarazem tablica ma poruszać się w kierunku osi X tak że początek spółrzędnych rusza się według wzoru $x=\varphi(t)$ wtedy ruch punktu naszego w odniesieniu do nieruchomego układu będzie absolutnie ten sam jak przedtem. Ruchy φ i ψ nazywamy wtedy składowemi, a ruch całkowity, który z nich wynika wypadkowym.

Utwórzmy jeszcze wyrazy ~~na szybkość~~ dla prędkości ruchów składowych t.j. tak zwane prędkości składowe.

W ten sam sposób jak przedtem znajdujemy $\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ prędkość w kierunku Y

$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ X

Jeżeli prędkości w kierunku Y



to oczywiście wypadkowa prędkość

$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}$ jak przedtem.

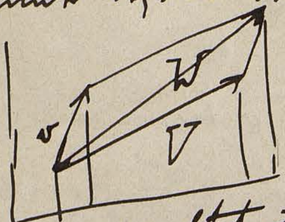
Łatwo z tąd przejść do wypadku ogólniejszego, gdzie prędkości ~~ruchu~~ składowe nie są prostopadłe do siebie lecz pod jakimś bądź kątem pochylone

13 Jeżeli n. p. punkt odbywa na tablicy ruch

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$

a równocześnie tablica sama ruch $x = \Phi(t)$,
$y = \Psi(t)$

(naturalnie w ten sposób żeby zawsze osi współrzędnych do siebie pozostały równoległe), to w pewnym momencie punkt będzie odbywać dwa ruchy składowe



przez co oczywiście dostanie się w przeciwległy bok równoległoboku utworzonego z prędkości v i V.

Ten sam rezultat otrzymamy rozkładając każdy z owych ruchów wprzód w dwie prostopadłe do siebie prędkości

$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ | $\Phi'(t)$

$\frac{dy}{dt} = \psi'(t)$ | $\Psi'(t)$

$\varphi' + \Phi'(t)$ w kierunku X

$\psi' + \Psi'(t)$ w kierunku Y

~~przeciwległe boki~~ przekątniej. Więc

co oczywiście odpowiada ściśle osyj

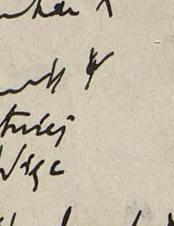
Componenten, Resultierende Kraft

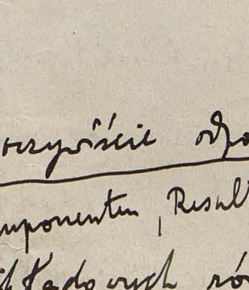
Wypadkowa prędkość dwuch składowych równa się wielkością i kierunkiem przekątniej równoległoboku utworzonego ze składowych prędkości. (Tej która wychodzi z kąta przez nie utworzonego).

Podobnie rozkładanie!

Nazywamy taką konstrukcję: dodawaniem geometrycznem; więc także: Pod wypadkową prędkością rozumiemy geometryczną sumę składowych.

Jeżeli mamy więcej składowych do składania wtedy będziemy jedną po drugiej składali więc





wypadkowa = boku zamykającemu wielobok utworzony ze składowych (dodawanych w dowolnym porządku)

Także jeżeli nie leżą w płaszczyźnie

Przejdźmy teraz do pojęcia przyspieszenia.

Jeżeli prędkość wciąż ten sam ma kierunek i tę samą wielkość, nazywamy to ruchem prostym jednostajnym. Jeżeli zmienia kierunek lub wielkość to zmianę tę prędkości — odniesioną do czasu w którym nastąpiła — nazywamy przyspieszeniem. Przyspieszenie ujemne równa się opóźnieniu.

Wróćmy raz jeszcze do owego ruchu prostego $y = \varphi(t)$, $x = 0$

Prędkość w momencie t jest $\varphi'(t) = \frac{dy}{dt}$

momencie $(t+\Delta t)$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t+\Delta t} = \varphi'(t+\Delta t)$

Więc zmiana prędkości $\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)$

a przyspieszenie (średnie) $w = \frac{\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t}$ = [Beschleunigung / accélération]

Zmniejszając nieskończenie ów przeciąg czasu Δt, który obrawszy otrzymamy przyspieszenie w momencie t: $w = \lim_{\Delta t=0} \frac{\varphi'(t+\Delta t)-\varphi'(t)}{\Delta t}$

$= \varphi''(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$

druga pochodna

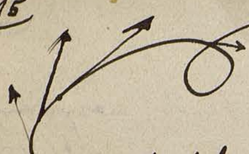
Również $\frac{d^2x}{dt^2}$ w kierunku X, $= \ddot{x}$

Więc przyspieszenie ~~całkowite~~ całkowite ruchu wypadkowego

znów $\sqrt{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}}$ } to nie można już wyrazić tak łatwo jako funkcyę z s.

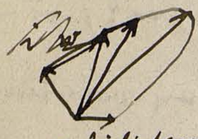
~~Ale~~ Można użyć także innego sposobu przedstawienia tej rzeczy t.j. za pomocą t. zw. hodografu.

15



Obieramy pewien punkt jako początek współrzędnych.

i wykreślamy z niego odcinki równe (co do wielkości i kierunku) prędkości w różnych punktach.



Krzywa utworzona przez końce tych odcinków

nazywa się hodografem. Z kształtu drogi samej nie możemy jeszcze poznać dokładnego wyobrażenia ruchu ale owszem wraz z hodografem.

Jeżeli chcemy znać prędkość w jakimś punkcie drogi wykreślamy styczną do drogi, a równoległą prostą od punktu odniesienia w hodografie.

Tym sposobem kierunek przyspieszenia możemy wykreślić.

n. p. $v(t)$ $v(t+\Delta t)$

~~[illegible]~~ $\varphi'(t)$ $\varphi'(t+\Delta t)$

$\psi'(t)$ $\psi'(t+\Delta t)$

Łącznica między końcami odcinków (średniego) v V daje kierunek przyspieszenia a wielkość jego równa jej długości podzielonej przez ~~[illegible]~~ czas Δt

To jest oczywiście to samo przyspieszenie całkowite jak przedtem, bo składowe jego będą $\frac{\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t}$ i .....

Więc przysp. całkowite ruchu wypadkowego ~~[illegible]~~ znajduje się w ten sam sposób jak prędkość wypadkową jako przekątnię z równoległoboku

Tak samo także jak przedtem pokazaliśmy dla prędkości składowych

i przysp. wypadkowe ruchów ~~[illegible]~~ nałożonych w kierunkach ~~nie pokrywających się~~ (jakichkolwiek)

znajduje się według tego samego prawa równoległoboku lub ~~równoległych~~

~~[illegible]~~ wieloboku jak tam, t. j. przez geometryczne dodawanie.

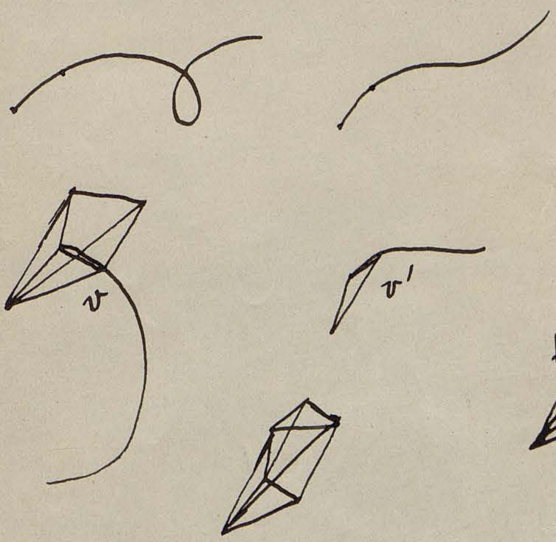
Zresztą zwykle najlepiej jest w celu wyznaczenia rozłożyć przyspieszenie

na osi współrzędnych x y z, a potem pojedyncze je zsumować i znów

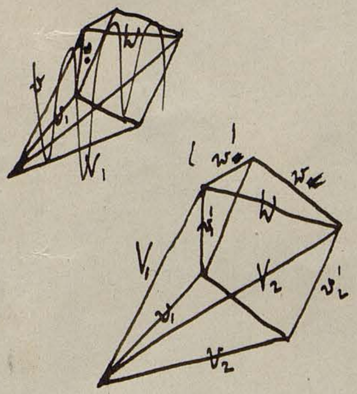
potem razem złożyć

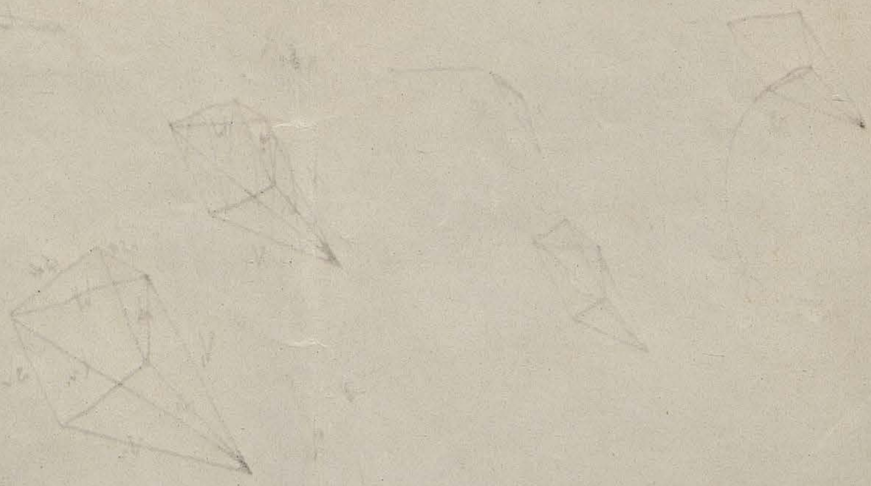
W 3 rozmiarach?

Zmiana prędkości rzeczy)



Przyspieszenie ruchu wypadkowego z dwuch składowych (prędkości) równa się geometrycznej sumie przyspieszeń ~~ruchów~~ (składowych prędkości).

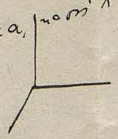




Podobnie jak
$x + iy = \alpha + i\beta$

$x = \alpha$
$y = \beta$

to znaczy że tyle jednostek a_1 mierząc X itd.



zatem oczywiście xyz
oznacza wektor $r = Xi + yj + zk$

$r = a \cdot \mathfrak{A}$ = Tensor. Versor a

$r \equiv a_1 i + a_2 j + a_3 k$

można by pisać $r \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases}$

$i\ j\ k$ wektory których długości $= 1$ a kierunk

lub $r \equiv a_1 i\quad a_2 j\quad a_3 k$

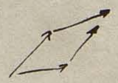
ale że właśnie tamtych symbolów używamy pochodzi z tego że okazują się praktyczne:

znak + wierzymy zatem w tym sensie
że u końca wektora przeniesiemy w nowym kierunku = odejmowanie geom.



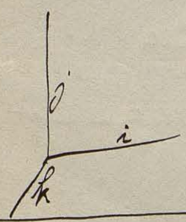
charakteryzujemy   komut.
Usprawiedliwione tem że pozostają ważne prawa ~~dl~~ dodawania: assoc.
~~dystryb.~~

$r + b =$ ~~[illegible]~~ $b + r$



w szczególnym przypadku równoległych = algeb. sumy

$(r + b) + c = r + (b + c)$



$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Dodawanie większej ilości wektorów

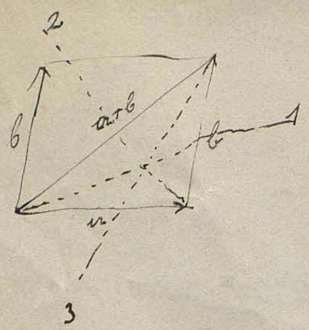


Geom. suma wektorów
(tworzących wielobok zamknięty) $= 0$

$r + b + c \dots = (a_1 + b_1 + c_1 \dots) i + \dots$

Tak samo odejmowanie

Więc możemy tak powiedzieć: przy równoczesnym istnieniu dwuch prędkości powstaje geometryczna suma ich tych



$$v_1 = \left(a + \frac{b}{2}\right) x$$

$$v_2 = a + y\left(a - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$v_3 = a + b + z\left(b + \frac{a}{2}\right)$$

$$v = a + b(\ldots)$$

$$x = a_1 + b_1 u \qquad \frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3}$$

$$y = a_2 + b_2 u$$

$$z = a_3 + b_3 u$$

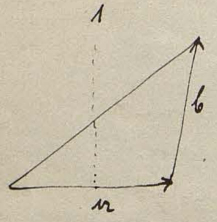
$$\left(a + \frac{b}{2}\right) x = a\left(\frac{y}{2} + 1\right) - b\,\frac{y}{2}$$

$$x = \frac{y}{2} + 1$$

$$x = -y = \frac{y}{2} + 1$$

$$\frac{3}{2} y = -1 \qquad x = \frac{2}{3}$$

$$v_1 = \frac{2}{3}\left(a + \frac{b}{2}\right)$$



$$v_1 = \frac{a}{2} + x[ac]$$

$$v_2 = a + \frac{b}{2} + y[bc]$$

$$v_3 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + z\left([ac] + [bc]\right)$$

~~$[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$~~

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + y[bc] = x[ac] \qquad \frac{a+b}{2} + y[bc] - x[ac]$$ [illegible] $y = 2$, $x = -2$

[illegible] punkt

$(a \ldots)$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{(ab)}{2} + y\,(a[bc]) = 0 \qquad y = -\frac{\frac{a^2 + (ab)}{2}}{(a[bc])}$$

$$\frac{(ab)}{2} + \frac{b^2}{2} = x\,(b[ac])$$

?

$$x = -\frac{\frac{(ab) + b^2}{2}}{(a[bc])}$$

Definicje:

$S\bar{a}\bar{b} = ab\cos ab$

$V\bar{a}\bar{b} = ab\sin ab \cdot \bar{c}$ $\quad c \perp \bar{a}, \perp \bar{b}$ w tym kierunku że a.b. Vab tworzą prawą rękę

Zatem: $Saa = a^2$ $\qquad Sab = 0$ jeśli: $\bar{a} \perp \bar{b}$

$Sii = 1 = Sjj = Skk$ $\qquad Sij = Sjk = Ski = 0$

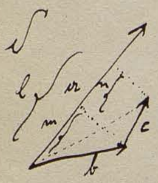
Czasem słyszy się o tem jako o dziwacznym rezultacie że iloczyn = 0 mimo że żaden z czynników nie jest = 0, ale to oznacza tylko

$S\bar{a}\bar{b} = S(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

To n.p. prosty dowód twierdzenia:

$ab\cos ab = ab(\cos ax \cos bx + \cos ay \cos by + \cos az \cos bz)$

$Sab = Sba$ $\qquad$ ponieważ $\cos ab = \cos ba$ $\qquad$ przemienności



$Sa(b+c) = Sab + Sac$ $\qquad$ rozdzielności

$= al \qquad = am + an$

Ale nie ma miejsca na prawo łączności (bo $Sa\,Sbc$ nic nie znaczy

zatem nazwa „mnożenie skalarne" nie zupełnie trafna — lecz nie mamy lepszej.

$Vaa = 0$ $\qquad Vii = Vjj = Vkk = 0$

$Vij = k = -Vji$ etc.

wyjątkowy przypadek ogólnego prawa $\quad Vab = -Vba$

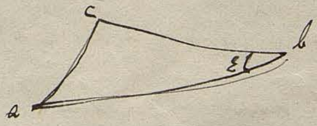
$$[v[bc]] = x\,b + y\,c \qquad = \alpha\left[(vc)\,b - (vb)\,c\right]$$

$$(v[v[bc]]) = 0 = x\,(vb) + y\,(vc) \qquad \| \quad b = c \qquad x = 1$$

$$x = (vc)\alpha \qquad y = -(vb)\alpha$$

$$[v[bc]] = b\,(vc) - c\,(vb)$$

$$S(b[v[bc]]) = (b^2)(vc) - (bc)(vb)$$

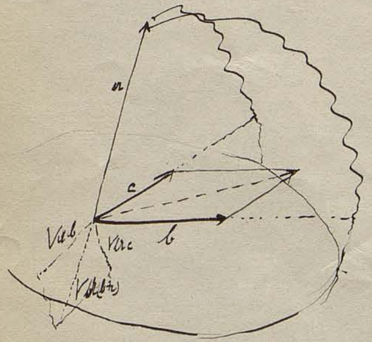


$$= ([bc][bv]) =$$

$$a = b = c = 1$$

$$\cos vc = \cos vb \cos bc + \sin vb \sin bc \cos \varepsilon \qquad \angle\binom{bc}{bv} = \pi - \varepsilon$$

$V \mathfrak{a}(b+c) = V\mathfrak{a}b + V\mathfrak{a}c$



$V\mathfrak{a}(b+c)$ leży w płaszczyźnie $E \perp \mathfrak{a}$

dzieląc przez a: | W tej samej płaszczyźnie także $V\mathfrak{a}b$ i $V\mathfrak{a}c$

$$V \mathfrak{a}_0 (b+c) = V\mathfrak{a}_0 b + V\mathfrak{a}_0 c$$

Zatem:

$$V\mathfrak{a}b = V(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Zastosowanie:

Objętość równoległościanu  $= S\mathfrak{a}Vbc = SbVc\mathfrak{a} = ScV\mathfrak{a}b$

$$= a_1 \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{pmatrix} + \text{---} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Każde równanie $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ zastępuje 3 równania: $a_1 i + a_2 j + a_3 k = \text{---}$

$a_1 = b_1$

$a_2 = b_2$

$a_3 = b_3$

odwrotnie też w fizyce gdy mamy
3 równania analogicznie zbudowane dla 3 składowych
to możemy je zastąpić przez równ. wektorowe; można to po prostu uważać za skrócenie takiego sposobu pisania
To przeprowadzić wszędzie w fizyce! Przykłady

Ten rachunek więcej pomoże w związku z geometrycznym sposobem przedstawiania sobie przestrzeni
z pojęciami przestrzennemi niż geom. analit. która sprowadza
geometrię do liczby. Ale nie ma pierwszeństwa. Tylko —

Przykłady prędkości

$y = gt^2$
$x = a + ct$

$x = a \sin \alpha t$

$y = b \cos \beta t$

$x =$ ~~a + r a sin~~ $ct - r \sin \frac{ct}{r}$

$y =$ ~~a - a cos~~ $r\left(1 - \cos \frac{ct}{r}\right)$

$\frac{dx}{dt} = c - c \cos \frac{ct}{r}$

$\frac{dy}{dt} = c \sin \frac{ct}{r}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \frac{ct}{r}}{1 - \cos \frac{ct}{r}}$

Co to znaczy:
jeśli 1 układ [illegible] a b
[illegible]

Zapoznawszy się teraz z pojęciami prędkości i przyspieszenia możemy przystąpić do poznania zasad głównych ~~mechaniki~~ dynamiki.
Jak już wspomniałem, zostały one ~~wypowiedziane pierwszy raz~~ wydzielone przez Newtona. Streścił on je ~~trzech zasadach~~ w kilku definicyach G. G. 1564-1642 1643-1727
~~Def.~~ wstępnych i trzech zasadach, t. zw. leges motus. 1686 Phil. nat. principia math.
Definicye odnoszą się do pojęcia masy i siły.
Masą jest — tak mówi on — ilość materyi, ~~którą sam dzieli się z~~ określona przez iloczyn z gęstości i objętości, mierzy się ją za pomocą ciężarowstało. | Ilość ruchu jest iloczyn z masy i prędkości
Siła jest dążenie do zmiany stanu ~~spoczynku lub~~ ruchu prostego, jednostajnego. ~~Mto~~
~~Otrzymujemy następujące~~ Trzy zasady brzmią jak następuje:
I). Każde ciało ~~zatrzymuje~~ zachowuje swój stan spoczynku lub ruchu prostego, jednostajnego, ~~jeżeli~~ dopóki siły przyłożone nie zmuszają je do zmiany tego stanu.
II). Zmiana ruchu jest proporcyonalna do ~~przyłożonej~~ siły i odbywa się w kierunku tej siły.
III). Ciała oddziaływają na siebie siłami równemi i skierowanemi przeciwnie. Wzajemne działanie dwu ciał są zawsze równe a mają kierunki przeciwne
Co do istoty tych praw i dzisiaj nie możemy im nic zarzucić, i wiele autorów i dzisiaj jeszcze trzyma się ich dosłownego brzmienia. n. p. Franke, Witkowski. Pod względem logicznej ścisłości w wypowiedzeniu nie są one jednak bez zarzutu, i bardzo słuszną wydaje mi się co do tego krytyka Macha i innych. Mianowicie definicya masy jako ilości materyi

17 jest niestosowna, ~~...~~ ponieważ materya (pojęcie) ~~...~~ jest to pojęcie metafizyczne, ilość materyi nie możemy mierzyć, a ~~dominowania gęstości~~ nie mamy niezależnego określenia gęstości.

Potem w zasadach ruchu po części to samo jest wypowiedziane, co wypływa już z definicyi siły (ciężkości), a na główną rzecz nie jest położony należyty nacisk.

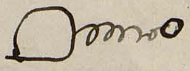
Zdaje mi się więc stosowniej przedstawić te prawa ruchu w innej formie, jak to czynił Mach i Boltzmann (także Natanson fiz. teor.).

~~...~~ ~~...~~ Postawimy ~~...~~ III prawo Newtona actio aequat reactionem naprzód i użyjemy je do definicyi pojęcia masy. Powiemy więc tak:

Doświadczenie nas uczy że ciała ~~...~~ (pod warunkami, których zbadanie należy do innych działów fizyki) udzielają sobie przyspieszenia w kierunku łączącym ~~je~~ i to w kierunkach przeciwnych. (przeciwległe)

N. p. ziemia i księżyc za pomocą grawitacyi

dwa ciała połączone sprężyną



" " naelektryzowane

" " magnetyczne

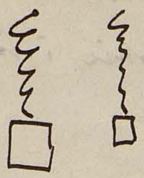
Doświadczenie uczy nas potem, że te przyspieszenia między dwoma ciałami zawsze ~~...~~ znajdują się w stosunku niezmiennym; niezależnym tak od tego czy wzajemnie oddziałują czy za pośrednictwem innego ciała ~~który nazywamy stosunek mas~~ odwrotny stosunek tych przyspieszeń nazywamy stosunkiem mas ciał. Te masy dotychczas uważano jako zupełnie niezmienne i stąd metafizyczne zdanie „prawo zachowania materyi".

N. p. ~~jeżeli~~ jeśli ciało A odbywa ruch przyspieszony i również ciało B a w każdym momencie przyspieszenie A będzie w pewnym stałym stosunku większe od B n. p. 2 razy tak wielkie i wtedy mówimy że B ma 2 razy tak wielką masę jak A.

Tym sposobem przynajmniej teoretycznie możemy mierzyć masy. Weźmiemy n.p. 1 cm³ wody [n.p. w naczyniu tak cienkim że tegoż masę można zaniedbać] jako jednostkę masy i połączymy przez sprężynę n.p. z ciężarem kilogram i będziemy mierzyli przyspieszenia spowodowane przez ściąganie się sprężyny. Zawsze 1 : 1000 ; mówimy więc kilogram ma masę 1000 razy większą od ~~jego~~ 1 cm³ wody i.t.d. Te masy takie same czy za pomocą bezpośredniego mierzenia wyznaczone czy też za pośrednictwem trzecich ciał. ~~Każde~~ Jeżeli substancya ciał równa to prop. do objętości. Iloraz z masy przez objętość nazywamy gęstością.

Zamiast dwa ciała do siebie także samy system mierzenia:

Przymocujemy dwie absolutnie takie same sprężyny i w tej samej położeniu do punkt ziemi



i porównujemy przysp. w różnych punktach

To jest właściwie ten sam sposób jak przedtem ale za pośrednictwem ziemi jako trzeciego ciała.

Aż dotąd to wszystko było tylko określeniem, definicyą pojęcia masy.

$$\frac{d^2x}{dt^2} : -\frac{d^2X}{dt^2} = M : m$$

Z tego wypływa $$M\frac{d^2X}{dt^2} = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

[Ten iloczyn z masy i przyspieszenia nazywamy siłą. To jest definicya siły. Możemy teraz zasadę doświadczalną przedtem wymienioną wypowiedzieć słowami, że siła którą ciało A wywiera na ciało B zawsze równa ale w kierunku przeciwna sile, którą B wywiera na A.

19 Aż dotąd tylko jedna siła działała między dwoma ciałami.

Teraz dodamy jeszcze jedną zasadę doświadczalnie sprawdzoną:

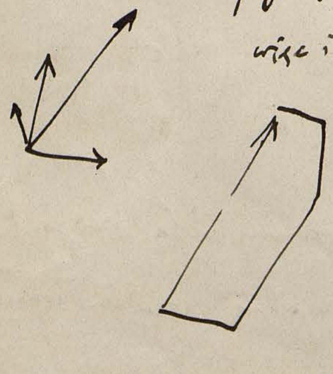
[Jeżeli ciało znajduje się równocześnie pod wpływem różnych innych ciał to siły przez nie wywierane są od siebie niezależne. To znaczy że każda siła ~~tak~~ wywołuje takie przyspieszenie działa jak by innych nie było. Nie przeszkadzają sobie wzajemnie. Więc przyspieszenie wypadkowe będzie przyspieszeniem złożonem z przyspieszeń składowych według owej zasady geometrycznego dodawania, przedtem omawianej (równoległoboków ~~[illegible]~~ lub też wieloboku). Przez to wypowiedziana jest zasada składania sił.

Nie jest ona pewnikiem logicznym, jak czasem sądzono, tylko wspiera się na właśnie wypowiedzianej zasadzie niezależności sił.

Nie rozumie się to samo przez się, mogłoby n.p. także i tak być, że jeżeli równocześnie działają dwie siły to przyjdzie do skutku tylko silniejsza i.t.d.

pojedyncze $m\frac{d^2s}{dt^2}$ są od siebie niezależne, m jest to same

więc i



W zastosowaniu do ⊥ zwykle lepiej rozłożyć każdą f w składowe rzuty na X i Y i Z

$X = f_1 \cos\alpha_1 + f_2 \cos\alpha_2 + \dots$

$Y = f_1 \cos\beta_1 + \dots$

$Z = f_1 \cos\gamma_1 + \dots$

(Poisson!)

rozkładanie

Z tego: jeżeli siły mają się znosić, to wielobok z nich wybudowany musi być zamknięty.

Za pomocą tych określeń jesteśmy teraz także w stanie ~~oby~~ mierzyć siły ilościowo. ~~[illegible]~~ Używamy we fizyce teraz ogólnie tak zwany system CGS [centymetr gram sekundy].

~~Przyjmujemy~~ Ponieważ jak powyżej wskazałem mierzyć możemy tylko stosunki mas, więc pozostaje nam zupełna dowolność co do tego, co nazywamy masą 1. ~~cała~~ Jako taką jednostkę masy przyjmujemy masę powyżej wzmiankowanego ~~[illegible]~~ $1\,cm^3$ wody przy temperaturze 4 stopni.

~~Ponieważ~~ Jednostka długości jest centymetr, a jednostka czasu sekunda.

To są 3 zasadnicze jednostki do których sprowadzamy mechanikę, a dla tego także całą fizykę.

Z tego już wypływa, co przyjmiemy za jednostkę prędkości $\frac{1\,cm}{1\,sek}$

A przysp. = 1 takie że zwiększa ono ~~[illegible]~~ prędkość o 1 cm na sekundę.

Wreszcie siła = 1 taka, która działając na masę 1 gram przyspiesza jego prędkość o 1 cm podczas 1 ~~na~~ sek.

N. p. znany Panom będzie że przyspieszenie przy spadaniu ciał wynosi 980 cm (później do tego wrócimy); więc siła ciężkości t. j. ciężar ~~w~~ jednego grama wynosi 980 jednostek siły. CGS^{-2}

Panom zapewne te określenia masy i siły bardzo dowolne będą się wydawały; Czemu właśnie ten iloczyn $m\frac{d^2x}{dt^2}$ nazywamy siłą i co za korzyść mamy z wprowadzenia tego pojęcia do fizyki? Na to powiem: najważniejsza ważność tego pojęcia leży w tem że doświadczenie pokazuje iż ten

iloczyn tak oznaczony zwykle w nadzwyczaj prosty sposób zależy od odległości w których ciało się znajduje. Tak n. p. siła grawitacyi, siła sprężystości, siły elektryczne i magnetyczne zależą tylko od odległości ciała od pewnego centrum środka działalności, tak że prawa fizyki nadzwyczajnie się upraszczają przez wprowadzenie tego pojęcia. Czemu jednak tak jest, czemu właśnie druga pochodna drogi według czasu odgrywa taką rolę, tego naturalnie nie wiemy. Fakt jest, że tak się rzeczy mają. Próbowano także wprowadzić w rachunki wyższe pochodne n. p. $m \frac{d^3s}{dt^3}$ ~~itd.~~ jako siły wyższego rzędu, ale to się na nic nie przydało i wnet kompletnie zaniechano dalszych prób w tej mierze.

Kinetyczna definicya „siły” zwykle prawie i statyczna. Pokażemy jednakże, że one identyczne

---

Zanim przejdziemy do zastosowania tych zasad ruchu na poszczególne przypadki, określimy jeszcze kilka pojęć ~~[illegible]~~ wielką rolę odgrywających w mechanice.

Tak iloczyn mv nazywamy pędem lub ilością ruchu.

Za pomocą niego możemy powyższe zasady trochę krócej wypowiedzieć:

~~$mv = \ldots$ (pęd ruchu)~~

$$mv = m\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = m\frac{ds}{dt}$$

~~siła = $m\frac{d^2x}{dt^2}$~~

To pojęcie siły zatem nic nie zawiera z anthropomorficznego pojęcia „siły” wspólnego: mocy, siły mięśniowej, natężenia etc. Prawda że początkowo działanie sił także za pomocą ~~[illegible]~~ wrażeń mięśniowo-nerwowych, ale tym sposobem żadnych dokładnych pomiarów robić niepodobna, zatem w fizyce opieramy się wyłącznie na obserwowaniu ruchów powstających, które dokładnie możemy mierzyć. Wypowiadając np. że siła magnesu $\sim \frac{1}{r^2}$ nie znaczy to że przyczyną jest siła, a ruch skutkiem, tylko konstatujemy fakt że przysp. ...

Jeśli ruch po elipsie koło środka ze stałą prędkością wycinkową!

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)=1 \qquad = r^2\left(\frac{1}{a^2}+\sin^2\varphi\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right)$$

$$1=\frac{r^2}{a^2}\left[1-\varepsilon^2\sin^2\varphi\right]$$

$$r^2=\frac{a^2}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$$

$$2r\frac{dr}{dt}=\frac{a^2}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}\,2\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$=\frac{r^4}{a^2}\,2\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{r}{a^2}\sin\varphi\cos\varphi\cdot c\,\varepsilon^2$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dr}{dt}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,c\,\varepsilon^2}{a^2}+\frac{r\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,c\,\varepsilon^2}{a^2}$$

$$=\frac{r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,c^2\varepsilon^4}{a^4}+$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{c^2\varepsilon^2}{r\,a^4}\left\{\sin^2\varphi\cos^2\varphi+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,\varepsilon^2\right\}$$

$$r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\ldots$$

$$\frac{(a-\xi)^2}{a^2}+\ldots=1$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=-\frac{c^2}{a^4(1-\varepsilon^2)}\,r$$

to samo wychodzi na ruchy składowe w X Y:

$$x=a\sin\alpha t \qquad y=b\cos\alpha t$$

$$F=\sqrt{X^2+Y^2}=m\,\frac{\alpha^2}{a^2}\,r$$

poprzez $w=y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=\frac{c}{2}=\frac{ab\alpha}{2}$

$$\alpha^2=\frac{c^2}{a^2b^2}=\frac{c^2}{a^4(1-\varepsilon^2)}$$

więc rezultat identyczny!

Ruch ciała spadającego [rzuconego] jako krańcowy przypadek ruchu planet

1). Elipsa $\left(\frac{a-\xi}{a}\right)^2 + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 = 1 - \frac{2\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}$

$$\xi = \frac{\xi^2}{2a} + \frac{\eta^2 a}{2b^2}$$

~~[illegible]~~

o ile a bardzo duże

$\frac{\eta}{b}$ skończone, zaniedbujący to co

$$\xi = \eta^2 \frac{a}{2b^2} \qquad \text{parametr } p = \frac{b^2}{a}$$

podczas gdy dla ciała rzuconego poziomo: $\xi = g\frac{t^2}{2}$ $\eta = ct$

$$\xi = \frac{g}{2c^2}\eta^2 \qquad \text{więc } \frac{a}{2b^2} = \frac{g}{2c^2} \qquad = \frac{c^2}{g}$$

---

2). Przy danem przyciąganiu stała $cR = \text{const}$ R = promień ziemi

---

3). Czasu obiegu nie można, ale

$\frac{T^2}{a^3} = \lambda$ wynika $F = -\frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{m}{r^2}$

$= \frac{4\pi^2 p}{c^2}$

więc obecnie $= \frac{4\pi^2}{c^2R^2}\frac{c^2}{g} = \frac{4\pi^2}{gR^2}$

~~$F = -\frac{4\pi^2 m}{r^2 \frac{4\pi^2}{gR^2}} = g\frac{R^2}{r^2}$~~

Czy pomoże Księżyc czas obiegu T!

Mechanika jest nauka o ruchu ciał małych pł. Obserwować możemy (przynajmniej bezpośrednio) tylko ruch względny, jednego ciała względem innych [? Kwestya czy ruch bezwzględny jest możliwy albo wyobrażalny

Rozważania mechaniczne można podzielić na kinematyczne (tylko do wielkości geometrycznych i czasu (jako zmiennej niezależnej) które odnoszą się) i na dynamiczne, w których także mechaniczna właściwość danej substancyi (poruszającej się) t.j. jej masa rolę odgrywa. (a statyka?)

Położenie punktu (którego ruch śledzimy) (względem danego układu spółrzędnych (prostokątnych) określić możemy strzałką OP = r. Sam symbol r nam jeszcze tego położenia nie określi, musimy tę strzałkę w przestrzeni wykreślić, albo ją sobie wykreśloną wyobrazić. Zamiast tego możnaby też podać n.p. liczby centymetrów odpowiadających długości rzutów prostokątnych strzałki: x, y, z (w centymetrach) na odpowiednich osiach, albo (czyli „bezwzględne wartości") także długość strzałki (w centym.) r i dwa kąty n.p. XOP, YOP dla określenia kierunku. Tego rodzaju wielkości, posiadające „kierunkowość" w rodzaju strzałki r, nazywamy wektorami (vehere jechać, ponieść), w przeciwstawieniu do wielkości liczbowych, niekierunkowych (~~jak długość r, x, y, z~~) które nazywamy skalarami (scala drabina schody). [Istnieją także jeszcze inne

Do pierwszych należą n.p. prędkość, przyspieszenie, siła, do drugich masa, gęstość, temperatura, ciepło, praca, energia, potencyał.

Wszystkie wektory tem się odznaczają że ~~określone są dopiero przez~~ [wymagają] podania trzech składowych do określenia, i że można je reprezentować zapomocą strzałki, o odpowiednim kierunku i odpowiedniej ~~wielkości~~ [długości], podczas gdy skalarne wielkości są oznaczone każda przez jedną daną liczbową.

Rachunki odnoszące się do skalarnych wielkości załatwia się zapomocą zwykłej arytmetyki i algebry, rachunki odnoszące się do wektorów zapomocą geometryi analitycznej przestrzeni lub z reguły wiele prościej zapomocą algebry wektorowej.

Rozważmy najpierw w krótkości fundamentalne zasady ~~tego rachunku, gdyż później~~ [Rachunek wektorowy który] nie jest zresztą czemś od geometryi analitycznej zasadniczo różnym. Można go także po prostu uważać za symbolikę skracającą [pisanie] wzorów zwykłej geom. analityczn. i przedstawiającą ją w formie przejrzystszej.

Zasadnicze zasady są następujące:

1). Używamy znaku równości $a = b$ między wektorami ~~[illegible]~~ jeżeli długość i kierunek tych wektorów ~~jest~~ [są] takie same, tylko początek z którego one są wykreślone może być różny. Jest to zatem skrócenie na [obejmujące] trzy równania, wyrażające że składowe rzutu wektorów a i b ~~są~~ są jednakowe:

$$a_1 = b_1$$
$$a_2 = b_2$$
$$a_3 = b_3$$

2). Używamy znaku dodawania +, ażeby oznaczyć tzw. dodawanie geometryczne:

$a + b$ oznacza ~~trzeci~~ [tworzący] wektor [bok trójkąta złożonego z a — — —], łączący punkt wyjścia wektora a, z punktem ~~końcowym, do którego się dojdzie~~ posuwawszy się do końca a, a potem przyłożywszy przy końcu [tym] wektor b

dodajemy geometrycznie wektor b do a, przyczepiając do końca a wektor równoległy do b i odpowiedniej długości; ~~[illegible]~~ wektor łączący punkt wyjścia a z punktem końcowym tak otrzymanym jest to co nazywamy sumą $a+b$.

Mechanika punktu

Kinematyka

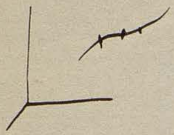
Układ spółrzędnych (osi z drutu, umocowane na ziemi)

dokładny chronometr

3 koła wystrzelone w przestrzeń w kierunkach ⊥ Lange [illegible] [illegible] IV 1 !

Poincaré !

$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$



Prędkość przy ruchu jednostajnym $= \frac{\text{drogę}}{\text{czas}}$

w każdej chwili na określonym miejscu

niemożliwość skoków nagłych

Pierwsza prędkości $\lim \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt}$ | jeżeli istnieje lim. innych ruchów nie znamy

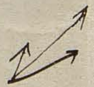
$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ | $x = at$, $y = b + ct^2$, $z = 0$

Najprostszy przykład rozkładu prędkości w prędkości składowe.

Co to znaczy zupełnie jasne:

(dwóch układów wspólny ruch)

W każdej chwili równoczesne ruchy  składają się według zasady ~~równoległoboku~~ addycji geometrycznej.

To jest prawo bardzo ogólne stosujące się do jakichkolwiek Vectorów.

Ekskurs w rachunek wektorowy. (którego będziemy teraz używać często jako skrócenie analit. do druku[?])

Wektory, Skalary   Gdy mowa o jakiejkolwiek wielkości fizycznej pierwsza myśl powinna być: czy to wektor czy skalar?

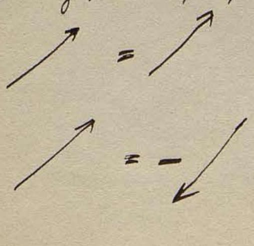
Dla Skalarów zwykła arytmetyka

Dla Wektorów geom. addycja, albo wiele prościej [wygodniej?] rachunek wektorowy.

~~[illegible]~~ Wektor oznaczony przez wielkość i kierunek = 3 wielkości

(bez względu na początek)

równanie $a \equiv b$ wyrażają 3 warunki

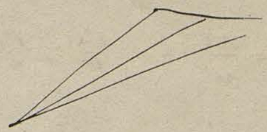


Mnożąc wektor liczbą m otrzymuje się wektor równoległy ale m razy tak duży.

Dzieląc " " ——— mniej.

Używając takich symbolów możemy teraz ruch punktu przedstawić i

$v = f_c(t)$ t. zn. $x_1 = f_1$
$x_2 = f_2$
$z = f_3$



$v_2 - v_1 = f(t_2) - f(t_1)$ = wyraz

$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ = prędkość prawie $\frac{dv}{dt}$ = prędkość wektorowa

---

Przykłady składania ruchów:

Ciało rzucone (spadające w wagonie kolejowym) obliczyć prędkość w punkcie kulminacyjnym

Punkt koła (cykloida) → ciekawy przykład nieciągłości toru (Czasem często się zdarzać że to niemożliwe!) obliczyć prędkość w tych punktach (: = 0)

Figury Lissajous — dawniej [starannie] mniemano że nasz układ spoczywający ziemskich stały a tamte ⊕ wszystko dane na ruchu stały obrotowy sfery + więcej.

Pozorne ruchy planet — wielkie odkrycie Kopernika : najprostsze rozłożenie tych ruchów!
mające je za pozorne : a nasz układ ziemski jako ruchomy.

Takie rozłożenie czasem bardzo skomplikowane n.p. z obserwowanych torów gwiazd spadających zmienić ich ruch własny, bez względu na ziemię. Tory gwiazd podwójnych

Wogóle dla [~~mechaniki~~] dynamiki najlepszym i [prawie] dotychczas jedynym odpowiednim polem do doświadczeń jest niebo

Astronomia daje najściślejsze dowody praw mechanicznych. Inne nie ich warte.

~~Gdy ruch w płaszczyźnie:~~

$v = f_1(t)$
$x = r\cos\alpha$
$y = r\sin\alpha$
~~$z = r\sin\beta$~~

$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\alpha - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}$ } złożyć znów w kierunku r i prostopadłym

$\frac{dx}{dt}\cos\alpha + \cdots = \frac{dr}{dt}$

$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + \cdots} = (\frac{dr}{dt})^2 - r^2[\sin\alpha(\frac{d\alpha}{dt})^2 + \cdots]$

$v_r = \frac{dr}{dt}$ $v_{\perp r} = r\frac{d\varphi}{dt}$ Także bezpośrednio geometrycznie

$$\mathfrak{r} = r\,\mathcal{R}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{\mathfrak{r}} = \mathcal{R}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\mathcal{R}}{dt} \qquad \left(r\frac{d\varphi}{dt}\cdot\perp\right)$$

$$= \frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\cdot\mathcal{V} \quad \text{(wektor styczny)}$$

$$\mathfrak{r} = f(t) = ix + jy + kz$$

(kierunki i j k niezmienne)

$$v = \dot{\mathfrak{r}} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} = v\mathcal{V}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt}$$

oczywiście znowu wektor zatem dodawanie geometryczne!

$$w = \frac{dv}{dt} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$v = v\cdot\mathcal{V}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\mathcal{V} + v\frac{d\mathcal{V}}{dt}$$

$$v\frac{d\mathcal{V}}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\mathcal{V}}{ds}$$

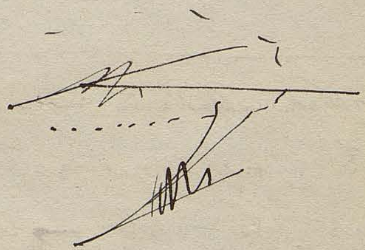
$$= v^2\mathcal{R}.$$

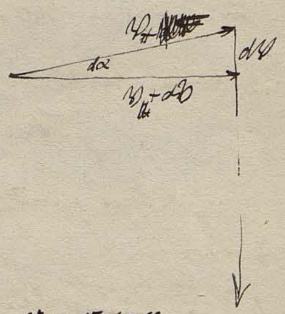
$$= v^2\frac{\mathcal{R}}{R}$$

$$w = \lim \frac{v' - v}{dt}$$

$$= \lim \frac{v_{t+dt} - v}{dt}$$

$$= \lim \frac{\dfrac{v_{t+2dt} - v_{t+dt}}{dt} - \dfrac{v_{t+dt} - v_t}{dt}}{dt} = \lim \frac{v_{t+2dt} - 2v_{t+dt} + v_t}{dt^2}$$





$$v_x = v\cos\varphi$$
$$v_y = v\sin\varphi$$

Rozkładanie przestrzeni na 3 $\perp$!

$$\mathfrak{r} = ix + jy + kz \qquad (\mathfrak{r}i) = x \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{r} = i(\mathfrak{r}i) + j(\mathfrak{r}j) + k(\mathfrak{r}k)$$

$$w_1 = w_x\cos\varphi + w_y\sin\varphi =$$

$$w_\perp = w_x\sin\varphi - w_y\cos\varphi =$$

$$v = \dot{\mathfrak{r}} = \mathcal{R}(\mathcal{R}\dot{\mathfrak{r}}) + \mathcal{V}(\mathcal{V}\dot{\mathfrak{r}})$$

$$w = \dot{v} = \dot{\mathcal{R}}(\mathcal{R}\dot{\mathfrak{r}}) + \dot{\mathcal{V}}(\mathcal{V}\dot{\mathfrak{r}}) + \mathcal{R}\left[(\mathcal{R}\ddot{\mathfrak{r}}) + (\dot{\mathcal{R}}\dot{\mathfrak{r}})\right] + \mathcal{V}\left[(\mathcal{V}\ddot{\mathfrak{r}}) + (\dot{\mathcal{V}}\dot{\mathfrak{r}})\right] \qquad \dot{\mathcal{V}} = \mathcal{R}\frac{d\varphi}{dt}$$

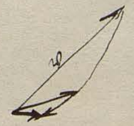
$$= \frac{\mathcal{R}}{r}(\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}) + \frac{1}{r}$$

Pojęcie hodografu

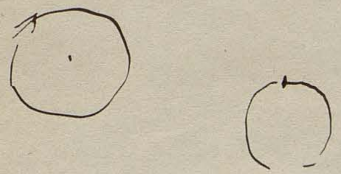
Jeżeli dany ~~tor~~ tor i hodograf to wiemy już z jaką prędkością w każdym ~~miejscu~~ punkcie toru się porusza

Bez hodografu wiemy tylko kierunek ale nie wielkość prędkości.





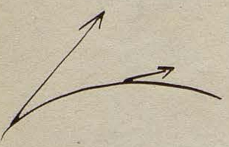
~~Pojęcie przyspieszenia~~ jednostajny Ruch po kole jest ruchem o zmiennej prędkości (biorąc to słowo w sensie wektorowym) bo sprawdzenie nie co do tensora prędk. ale co do wersora prędkości.



Pojęcie przyspieszenia:
= czasowa zmienność prędkości (w sensie wektorowym)

1). Przyspieszenie prostolinijne
2). Przysp. krzywolinijne:

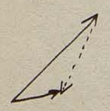
Przyspieszenie zatem określone położeniem w 3 nieskończ. bliskich [illegible]



Różnica tych prędkości =  podzielona przez czas przysp. przeciętne

chwilowe z dla nieskończ. krótkiego przeciągu czasu

$$\lim \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dv}{dt}\right)_2}{t_1 - t_2} = \frac{d^2v}{dt^2}$$



Oczywiście prędkości można sobie wyobrazić wyrażone rozłożone np. w trzech komponentach:

$\frac{dv}{dt_1}$, $\begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases}$ $\frac{dv}{dt_2}$ $\begin{cases} v_2 \\ v_2 \\ v_2 \end{cases}$ i otrzymamy się 3 składowe różnicy: $v_2 - v_1$, $v_2 - v_1$, $v_2 - v_1$; te 3 składowe przysp. $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$

$= \frac{d^2x}{dt^2}$

$\frac{d^2y}{dt^2}$

$\frac{d^2z}{dt^2}$

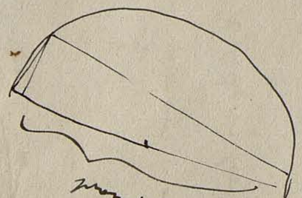
chwilowe przysp. kierunek stycznej do hodografu

więc będzie ~~można~~ można składać i rozkładać

tak samo jak prędkości: według zasady dodawania wektorowego (ponieważ to są: $\frac{\text{różnica wektorów}}{\text{czas}}$)

(Wymiar
Rozmiar $\frac{l}{t^2}$)

[illegible]



1). Ruch punktu jest przysp. w tym samym kier. (drogi)

2). Przy każdym ruchu krzywym przysp. ma kierunek inny niż styczny

Np. jednostajny ruch po kole = przyspieszony; kierunek ⊥

składowe ⊥ przyspiesz. nie wytworzy wzrostu prędkości tylko zmieni kierunek

Zatem zadanie rozłożyć przysp. w składowe w kierunku drogi i ⊥

Dla [illegible]! a to wytworzy 3 punkty styczna ścisłostyczna

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha \quad \left(= \frac{ds}{dt}\cos\alpha\right) \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\alpha$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha - v\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\sin\alpha + v\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

w kierunku drogi: $\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\alpha = \frac{dv}{dt}$

$\perp$: $-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\alpha = v\frac{d\alpha}{dt}$

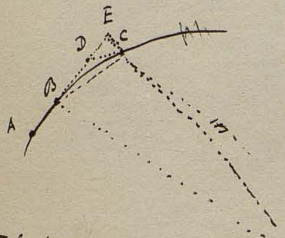
Wypadkowe przyspiesz. $\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}$ w tej [illegible]

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{d\alpha}{ds} = \frac{v}{R}$$ ← promień krzywizny

$$w_\perp = \frac{v^2}{R}$$ ~~przysp.~~

Także geometrycznie: $\frac{AB}{czas}$ = prędkość

$\frac{DC}{czas^2}$ = przysp. = składowej w kierunku ⊥DC i ∥C $\quad \frac{DE}{\Delta t^2} \quad \frac{EC}{\Delta t^2}$



$$\frac{DE}{\Delta t^2} \neq \frac{BC - AB}{\Delta t^2} = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

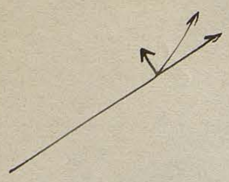
~~uważając odcinek ... krzywej jako koło~~

$$\frac{EC}{\Delta t^2} = \frac{(BC)^2}{R}\frac{1}{\Delta t^2} = \frac{v^2}{R}$$

Wektorowo: $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{v\cdot U_v}{dt} = v\frac{dV}{dt} + \frac{dv}{dt}\cdot V$

$$= v\cdot\frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= v^2\frac{dV}{ds} = \frac{v^2}{R}\cdot R$$



$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\perp = r\frac{d\varphi}{dt}$$

$$w_r = \frac{d^2r}{dt^2} - \cancel{\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)}\; r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$w_\perp = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

Wszystkie te różnorodne ruchy : przysp. stałe = g w związku ze stałą siłą ~~ciężkości~~ 32

Ale dopiero Newton poznał ważność pojęcia przysp. dla wszystkich ruchów.

~~Principia philos. mathemat.~~ Philosophiae naturalis principia mathem. 1686

Natural philosophy! Filozofia przyrody = fizyka

~~Axiomata~~ 4 Definitiones i 3 leges motus

Przyspieszenie w kierunku promienia RV i ⊥

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} \qquad \Big| \quad \frac{dy}{dt} = \ldots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{dt}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - r\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad \Big| \quad \frac{d^2y}{dt^2} =$$

$$w_r = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$w_\perp = \frac{d^2y}{dt^2}\cos\varphi - \frac{d^2x}{dt^2}\sin\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Na tem kończymy ~~Dyn~~ Kinematykę punktu, ponieważ i tak będzie dosyć sposobności do krytyki kinematycznych.

Dynamika punktu.

Początki: Badania Galileusza nad spadaniem ciał V. Wszystkie ciała spadają z równą szybkością

Technika doświadcz. prymitywna więc namysł. teoret.

~~Ruch swobodny~~ Ruch wraz szybkości ciężkości; pierwsza hipoteza prędkości ~~...~~ $\sim s$

$$\frac{ds}{dt} = a s \qquad \text{z tego jednak wynikałoby} \qquad s = s_0 e^{at}$$

więc nie mógłby zacząć się poruszać z punktu 0

Druga hipoteza $\frac{ds}{dt} = a t$

$$s = a\frac{t^2}{2}(+b)$$ to jest możliwe rezultat ale czy prawdziwe?

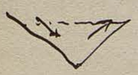
$$\frac{d^2s}{dt^2} = a$$

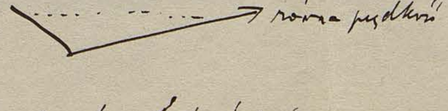
Doświadcz. stwierdzenie dokładniejsze za pomocą równi pochyłej Świadectwo dośw. przy spad z wieży pochyłej w Pizie

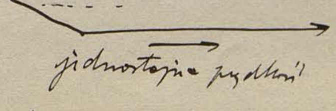


$$s = g\sin\varphi\,\frac{t^2}{2} \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\varphi}} \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh}$$

Dzisiaj oczywiście mamy rozmaite sposoby dokładniejszego mierzenia (...







Tak doszedł do zasady bezwładności (przynajmniej w tym spec. przypadku)

To samo przyjął potem dla ciał rzuconych: że ruch poziomy trwa a superponuje się wszystko spadek

1). $X = -\frac{\alpha}{x^2}$

$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \beta - \frac{\alpha}{x}$

2). $X = +\alpha x$

3). $X = mg - \beta\frac{dx}{dt}$

4). $X = -\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$\frac{dx}{\sqrt{a-\frac{b}{x}}} = dt$

$\frac{1}{x} = y$

~~$dx = -\frac{dy}{y^2}$~~

$\int\frac{dx}{\sqrt{a-\frac{b}{x}}} = \int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{ax-b}}$

$ax - b = y$

$x = \frac{b+y}{a}$

~~$\int\frac{dy}{y^2\sqrt{a-by}}$~~

~~$= \int\frac{\sqrt{ax^2-bx}}{ax-b}dx$~~

~~$= \int\frac{dy}{ay}\sqrt{\frac{y(b+y)}{a}} = \int dy\frac{\sqrt{y^2+by}}{y}$~~

$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2-bx}} = a\sqrt{ax^2-bx} + \int\frac{b\,dx}{\sqrt{ax^2-bx}}$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a + bx^2$

$\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = dt$

$\lg\left(x+\sqrt{a+bx^2}\right)$

$\frac{dv}{dt} = a - bv$

$\lg(a-bx) = \ldots$

$a - bv = e^{-bt}$

$\frac{dx}{dt} = a + be^{-bt}$

$\frac{dv}{dt} = -bv^2$

$\frac{dv}{v^2} = -bt$

$\frac{1}{v} = bt + b$

$\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{b+at}$

$x = (At+B)^{1/3}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(At+B)^{-2/3} = -\frac{A}{3}\frac{1}{x^2}$

v razie a=0 $\sqrt{x}\,dx = dt$

$\sqrt{a-\frac{b}{x}} =$

$x = a(\varphi - \sin\varphi)$ $\qquad \varphi = ct$

$y = a(1 - \cos\varphi)$

$\dot x = ac(1 - \cos\varphi)$

$\dot y = ac \sin\varphi \qquad \dot x^2 + \dot y^2 = 2a^2c^2(1-\cos\varphi) = 2ac^2 \cdot y$

$\ddot x = ac^2 \sin\varphi = c^2\sqrt{a^2 - (1-\frac{y}{a})^2} = c^2\sqrt{2ay - y^2}$

$\ddot y = ac^2 \cos\varphi = c^2(a-y)$ } Siły niepotencyalne!!

ale możliwa byłaby też inna forma $\ddot x = f_1(x,y)$, $\ddot y = F(x,y)$ może też powstać układ potencyalny?

W ogóle chcąc określić pole siły (trzeba mieć możność porównania dróg z różnymi warunkami początkowymi zatem żeby rozstrzygnąć czy siły są potencyalne czy nie)

N.p. w tej formie $X = ac^2 \cdot \frac{act - x}{a}$

$Y = ac^2 \frac{a-y}{a}$ mamy te same siły wyrażone w formie potencyalnej $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$

Potencyał: $c^2\left[actx + ac^2y - \frac{c}{2}(x^2+y^2)\right]$

Tak samo ruch paraboliczny

$x = ct$

$y = g\frac{t^2}{2}$ może powstać przy działaniu sił $X = 0$, $Y = mg$

albo też n.p. $X = 0$

$Y = m \cdot \frac{2y \cdot c^2}{x^2}$ w takim razie $\frac{\partial X}{\partial y} \lessgtr \frac{\partial Y}{\partial x}$

lub $X = \frac{2y}{g} - \frac{x}{c}$

$Y = mg$

Jeżeli jednak znamy ogólne wyrażenie w zależności od danych parametrów

$x = a_1 + c_1 t \qquad \dot{x} = c_1$

$y = a_2 + c_2 t + \frac{g}{2} t^2 \qquad \dot{y} = c_2 + gt$

$m\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\left[c_1^2 + c_2^2 + 2c_2 g t + g^2 t^2\right]$ to znów da się wyrazić jako

$$L_{xy} - L_0 = mg\left[c_2 t + \frac{g}{2} t^2\right] = mg(y - a_2)$$

czy nie da się istotnie wyrazić w innej formie [nie zawierającej stałych dowolnych c_1, c_2 ?]

Ta sama ~~kwestia~~ już przy ruchu prostolinijnym n.p. z oporem

Biorąc $x = a e^{-\alpha t}$ to może pochodzić z siły oporowej $X = -m\alpha \dot{x}$

$\dot{x} = -a\alpha e^{-\alpha t}$ lub z siły potencjalnej $X = m\alpha^2 x$!

$\ddot{x} = a\alpha^2 e^{-\alpha t}$

Jeżeli ogólne wyrażenie:

$x = b + a e^{-\alpha t}$, w którym a, b dowolne stałe

to $L_x - L_0 = -\frac{m}{2}(a^2\alpha^2 e^{-2\alpha t})$ nie da się wyrazić w formie $= f(x) - f(0)$ bez wprowadzenia wielkości a, b

---

podczas gdy rozwiązanie $\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 x$

$x = a e^{\alpha t} + b e^{-\alpha t} = \frac{c}{\alpha} e^{\alpha t} + b(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$

$\dot{x} = \alpha\left[a e^{\alpha t} - b e^{-\alpha t}\right] \qquad (a - b)\alpha = c$

$\dot{x}_t^2 = \alpha^2\left[x^2 - 4ab\right] \qquad a = b + \frac{c}{\alpha}$

$= \alpha^2\left[x^2 - x_0^2 + \frac{c^2}{\alpha^2}\right] \qquad x_0 = 2b + \frac{c}{\alpha}$

$\dot{x}^2 - c^2 = \alpha^2(x^2 - x_0^2) \qquad b = \frac{x_0}{2} - \frac{c}{2\alpha}$

więc tutaj da się wyrazić przez $\qquad a = \frac{x_0}{2} + \frac{c}{2\alpha}$

$$\ddot{x} = \alpha^2 x$$

$$\dot{x}^2 = \alpha^2 x^2 + \beta$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}} = dt$$

$$\lg\left(\alpha x + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2}\right) = t + c$$

$$\alpha x + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 x^2} = A e^{\alpha t}$$

to samo co przedtem

$$\beta^2 + \alpha^2 x^2 = \alpha^2 x^2 + A^2 e^{2\alpha t} - 2A\alpha x e^{\alpha t}$$

$$x = \frac{A^2 e^{2\alpha t} - \beta^2}{2A\alpha e^{\alpha t}} = \frac{1}{2}\frac{A}{\alpha}\left[e^{\alpha t} - \beta^2 e^{-\alpha t}\right]$$

Więc próbuję się czy (niezależnie od prędkości początkowej (i punktu wyjścia?) (różnica energii kinet. w 2 punktach jest)

Jeśli tak, to istnieje potencjał.

czy trzeba oba punkty zmieniać:

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} - m\frac{\dot{x}_0^2}{2} = f(x) - f(x_0) \qquad m\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

czy wystarczy wychodzić z punktu (0) ? $\qquad m\frac{\dot{x}^2}{2} = f(x)$

Przy ruchu 2 wymiarowym to nie wystarczy! Bo nie można w ogóle sposób zmieniać wielkości prędkości początkowych tak żeby przecież krzywa przechodziła wciąż przez punkt żądany. owszem!

Wtedy trzeba się uciec do więzów ruchów nieswobodnych, na dowolnych krzywych przechodzących przez owe dwa punkty.

Poincaré masę współczynnik który wprowadzam do rachunków dynamiki, nie uważa środek bezwładności

Przejdźmy teraz do zastosowania naszych zasad mechanicznych do rozmaitych przypadków.

Po pierwsze zbadajmy bliżej ruch prosty (prostodrożny).

Jeżeli ruch odbywa się w kierunku prostym, możemy w tym kierunku położyć oś ~~współrzędnych~~ odciętych X, więc $v = \frac{dx}{dt}$, przysp. $w = \frac{d^2x}{dt^2}$

Z definicyi naszej siły wynika wtedy prawo Newtona:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f$$ co także można napisać

$$f = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(m v)$$ [Ilość ruchu, quantité de mouvement, momentum]

Iloczyn mv nosi nazwę ilości ruchu lub pędu. Możemy więc także wypowiedzieć w tym wypadku zasadę Newtona temi słowami:

siła równa się zmianie pędu, podzielonej przez odpowiedni przeciąg czasu,

(lub też ... . . " podczas jednostki czasu)

Całkując raz otrzymamy:

$$m \frac{dx}{dt}\Big|_0^t = \int_0^t f\,dt$$ ~~jeżeli założymy że punkt~~

$$= m\left(\frac{dx}{dt}\right)_t - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = m(v_t - v_0)$$

Jeżeli ta sama siła działa na inną masę M:

$$\int_0^t f\,dt = M(V_t - V_0)$$ Impuls

Także ta całka $\int f\,dt$ otrzymała osobne nazwisko: popęd czyli impuls;

powiemy więc: zmiana pędu równa się popędowi

23 Jeszcze prościej jeżeli w początku ($t=0$) ~~ciało~~ punkt ~~[illegible]~~ był w stanie spoczynku $v_0=0$, wtedy popęd = pęd

Z drugiego równania wynika: jeżeli siła ta sama działa (na równe masy) podczas takiego samego czasu, wtedy jednakowe w nich wzbudza pędy.

Jest to pojęcie korzystne mianowicie przy zbadaniu sił, tak zwanych chwilowych. Tak nazywamy siły — stałe albo zmienne — które działają tylko przez bardzo krótki przeciąg czasu. N. p. przy eksplozyach, przy uderzeniu ciał o siebie. Wtedy zwykle siły są zmienne ale nie znamy dokładnie prawa, ~~[illegible]~~ którego się zmieniają, ale o to nam też nie chodzi, wystarczy jeżeli znamy ostateczną zmianę prędkości przez nie wywołaną która będzie $\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_1} f\,dt$

więc jeżeli znamy wielkość popędu.

Tu tworzyliśmy całkę z siły ~~i elementów cz~~ działającej podczas pewnego czasu. Również możemy utworzyć całkę z siły działającej na pewnej drodze t. j. całkę

$$\int_{x_0}^{x_1} f\,dx = \int_{x_0}^{x_1} m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\Bigg|_{x_0}^{x_1} \qquad \Bigg\| \text{bo } 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dx} = 2\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= \frac{m}{2}\,v_1^2 - \frac{m}{2}\,v_0^2$$

Ta całka iloczynu z ~~f~~ siły i drogi na której ona działa, ma pewne ważne znaczenie, nazywamy ją pracą (wykonaną) zdziałaną przez siłę na drodze z x_0 do x_1.

(Arbeit, travail, work)

24

37

A iloczyn $\frac{m}{2}v^2$ nazywamy energią kinetyczną. [L K, vis viva / énergie cinétique / kinetic energy]

Mamy więc rezultat nadzwyczaj ważny:

[Różnica energii kinetycznej w dwuch ~~punktach~~ punktach równa się pracy wykonanej na drodze między temi punktami.

Później poznamy nadzwyczaj ważne uogólnienie tej zasady dla ruchu ~~krzywoliniowego~~ krzywego.

~~Przypadek~~ Jak przedtem już wspomniałem ~~bardzo często~~ zwykle siła f jest znajomą jako funkcyą odległości x. Wtedy więc ~~pod założeniem że~~ całka $\int_{x_0}^{x} f\,dx$ będzie ~~...~~ także funkcyą $x = -F(x)$

Mamy więc: ~~$\frac{m}{2}v^2 + (F(x) \ldots) = \frac{m}{2}v_0^2$~~

$$\frac{m}{2}v^2 = -F(x) + \text{const}$$

$$\frac{m}{2}v^2 + F(x) = \text{const}$$

$F(x)$ nazywamy ~~...~~ energią potencyalną

mamy więc rezultat: Suma energii kinetycznej i ~~pracy~~ potencyalnej pozostaje stałą. ~~(Ale tylko jeżeli egzystuje taka funkcya F, o czem później)~~

Podobnie jak przedtem wyraziliśmy ~~...~~ siłę f jako pochodną pędu według czasu ~~więc~~ tak tutaj mamy $f = \frac{d}{dx}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = mv\frac{dv}{dx} = mv\frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx}$

siłę równą pochodnej energii kinetycznej, lub ujemnej pochodnej energii potencyalnej według drogi.

Są to pojęcia pomocnicze, które czasami znacznie upraszczają rozumowanie. Descartes i Newton przeważnie posługiwali się pędem w rozważaniach i uważali go jako wielkość fundamentalną mechaniki, Leibnitz Huyghens i

przeciwnie używał energii w ten sposób. Między temi dwoma partyami długi trwał spór podczas 17 go i 18go wieku, aż d'Alembert rozstrzygnął że obie mają lub nie mają racyi, ponieważ ~~ani pęd ani~~ można uważać z tem samem prawem pęd lub energię jako charakterystyczną cechę ruchu i zależy to od zadania, którą w danym razie lepiej użyć.

Zobaczymy atoli później że przecież ~~energia~~ pojęcie większej jest wartości.

Po tych ogólnych rozważaniach przejdźmy do kilku zadań szczególnych

Zadania mechaniczne można podzielić na dwie klasy:

Albo ruch jest dany jako funkcya czasu etc. i mamy wyznaczyć siły które jego sprawiają — zwykle zadanie stosunkowo łatwe ponieważ ~~prowadzące~~ rozwiązywane zapomocą różniczkowania — albo siły są dane i trzeba ~~wyznaczyć~~ znaleźć ruch, który w skutek nich powstanie — zadania daleko trudniejsze, bo doprowadzające do całkowania — i ~~t~~ temi najwięcej będziemy się zatrudniali.

A

1). $x =$ ~~...~~ $a + bt$ $\qquad f = 0$ (bezwładność, Trägheit, inertia)

2). $x = a + bt + ct^2$ ~~jednostajnie przysp.~~ tego rodzaju jest ruch ciał ~~st~~ swobodnie spadających

$m \frac{d^2x}{dt^2} = 2mc$ więc siła stała jednostajna.

$2c = 980\ cm = g$ Doświadczenie że ciała tak samo prędko spadają więc g to samo.

$f = mg$ więc siła grawitacyi proporcyonalna do masy ciała

Na tem polega mierzenie mas (albo właściwie porównywanie mas) zapomocą wagi.

waga sprężynowa

Maszyna Atwooda w przyp. przyśpieszenia

3). $x = (At + B)^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{2}{3} A (At+B)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2}{9} A^2 (At+B)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9} A^2 \frac{1}{x^2}$$

więc siła $= -\frac{2m}{9} A^2 \frac{1}{x^2}$

B). Dane prawo siły; i oprócz tego dla wyznaczenia stałych dwa warunki początkowe lub graniczne.

Najłatwiejszy ale nierzadki przypadek: siła jako funkcja czasu

1). $\ddot{x} = t^n$

$$\dot{x} = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + a$$

$$x = \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + at + b$$

dane albo pozycja punktu w dwuch momentach albo w jednym momencie pozycja i prędkość do wyznaczenia stałych.

$$\ddot{x} = f(t)$$

$$\dot{x} = \int f(t)\, dt + a$$

$$x = \int dt \int f(t)\, dt + at + b$$

n. p. $f(t) = g$!!

2). Zwykły przypadek: siła jako funkcja miejsca

$$\ddot{x} = x^n$$

n. p. $x = 0$ $\dot{x} = 0$

$t = 0$ $x = 0$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{x^{n+1}}{n+1} + ~~a~~$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\, x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$x^{-\frac{n+1}{2}} \frac{dx}{~~dt~~} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\, dt \qquad \sqrt{\frac{2}{n+1}}\, t + ~~b~~ = \frac{x^{\frac{n+3}{n+1}}}{\frac{n+3}{n+1}}$$

27

$$\ddot{x} = f(x)$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \int f(x)\,dx + a$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2a + 2\int f(x)\,dx}} = dt$$

$$t + b = \int \frac{dx}{\sqrt{2(a + \int f(x)\,dx)}}$$

wypracowanie przydatnych funkcyi zwykle trudne

potem trzebaby jeszcze funkcyę odwrócić

$x = \varphi(t)$ $\|$ N. p. $f(x) = -x$!! $\|$

drgający prosty

3). Siła jako funkcya miejsca i czasu etc. np. $\ddot{x} = f(x, t)$

n. p. punkt ~~spadający~~ rzucony w ośrodek ~~drgającym~~ gęsty ~~albo z bardzo lekkie~~ ; ~~lub spadający tak że równocześnie~~

Wtedy ośrodek wywiera pewien opór, który jest funkcyą prędkości z którą punkt się rusza; czem prędzej, tem większy opór ośrodka.

Jeżeli prędkość nie jest bardzo wielka to można uważać ów opór jako proporcyonalny do prędkości.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \cancel{mg} - k\frac{dx}{dt}$$

$$\cancel{m}\frac{dx}{dt} = \cancel{mgt} - \frac{k}{m}x + \cancel{a} \qquad \Big| \; t = 0, \; \frac{dx}{dt} = a, \; x = 0$$

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu i pierwszego stopnia

$$\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x - \cancel{m}a = 0$$

$$\frac{dx}{x - \frac{am}{k}} = -dt \cdot \frac{k}{m}$$

~~$x = A + Be^{-\alpha t}$~~

~~$\frac{dx}{dt} = \dots - AB\alpha t e^{-\alpha t}$~~

$$\dot{x} = -B\alpha e^{-\alpha t}$$

$$-\frac{mt}{k} = \lg\left(x - \frac{am}{k}\right)$$

$$\left(-B\alpha + \frac{k}{m}B\right)e^{-\alpha t} + \frac{k}{m}A - a = 0$$

$=0$ $=0$

$$\alpha = \frac{k}{m} \qquad A = \frac{am}{k}$$

$$x = \frac{am}{k} + Be^{-\frac{kt}{m}}$$

$$0 = \frac{am}{k} + B \qquad B = -\frac{am}{k}$$

$$x = \frac{am}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

$$\dot{x} = a e^{-\frac{kt}{m}}$$

Dyskusya:

~~Nie~~

największa odległość $= \frac{am}{k}$ tem większa im $a, \frac{m}{k}$ .. itd.

prędkość w punkcie $\begin{smallmatrix} x=0 \\ t=0 \end{smallmatrix}$ $= a$ zmniejsza się do 0.

Również: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \frac{dx}{dt} = v$

Również: $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \frac{dx}{dt} = v$

Ogólniejszy przykład: $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\,f\!\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}f(v)} = t + c \qquad = \log \frac{g + \frac{k}{m}v}{g - \frac{k}{m}v}$$

$v =$

Stokes:

$$v = \frac{2}{9}\frac{a^2\rho g}{\mu} \qquad \mu = 0{\cdot}018 \ (0^\circ) \text{ wody} \qquad 0{\cdot}00017 \text{ pow.}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$\frac{m}{v} = -t + \text{const}$$

$$m\frac{dt}{t + \text{const}} = dx$$

Ruch (punktu swobodnego) w dwuch lub trzech rozmiarach.

Aż dotąd ~~[illegible]~~ mieliśmy zawsze ruch prosty, więc przyspieszenie tylko w kierunku ruchu, więc i siła tylko w kierunku ruchu.

Aby droga stała się krzywą przysp., więc i siła musi wychodzić z kierunku stycznej.

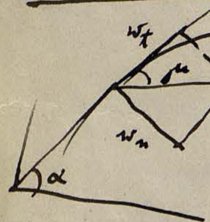
Zawsze siłę f można rozłożyć w składowe $f\cos\alpha$, $f\cos\beta$, $f\cos\gamma$ } działające wzdłuż osi xyz.

i wtedy prawa niezależności sił mamy wtedy

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\cos\alpha$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f\cos\beta \quad \text{etc.}$$

} Punkt odbywa wówczas wszystkie te ruchy równocześnie.

Zamiast spółrzędnych x, y możemy także inne użyć. Najprościej jeśli tor jest dany, użyć długość s jako zmienną jedyną. Wtedy prędkość $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$



Całkowite przysp., więc i siła jak mówiliśmy nie leży w kierunku stycznej. Jakie są jej składowe w kierunku stycznej i normalnej?

Mamy $\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\alpha$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha - v\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\sin\alpha + v\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

$$w = \sqrt{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2}} = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

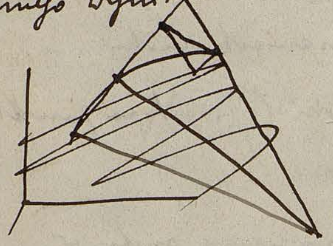
$$w_t = w\cos\mu = w(\cos\alpha\cos a + \sin\alpha\sin a) = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\alpha = \frac{dv}{dt}$$

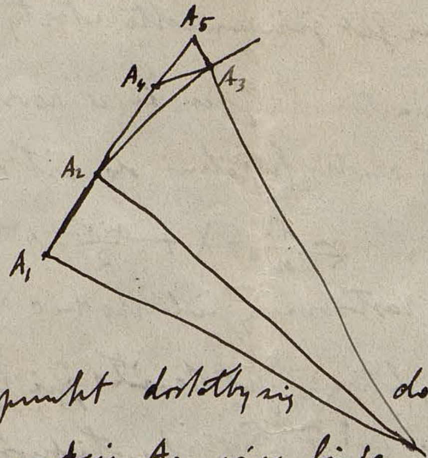
więc $w_n = v\frac{d\alpha}{dt} = v^2\frac{d\alpha}{ds} = \frac{v^2}{R}$ (promień krzywizny $R = \frac{ds}{d\alpha}$)

Oprócz przyspieszenia stycznego t.j. w kierunku ruchu ~~[illegible]~~ chwilowego istnieje jeszcze przysp. w kierunku normalnej, równe $\frac{v^2}{R}$.

Żeby więc punkt odbywał taki ruch na krzywej tego kształtu z prędkością v

musi na niego działać ~~przyspieszenia~~ siła $m\frac{dv}{dt}$ w kierunku stycznej i $m\frac{v^2}{R}$ t.j. tak zwana siła centry~~fugalna~~petalna w kierunku środka krzywizny. Także za pomocą konstrukcji geometrycznej dochodzimy do tego samego wyniku:





Gdyby nie było ~~przysp.~~ siły, punkt dotarłby się do punktu A_4, tymczasem w rzeczywistości będzie w punkcie A_3; więc linia A_4A_3 oznacza przysp.

Rozłóżmy w przysp. styczne $A_4A_5 = A_3A_2 - A_2A_1 + \delta = \frac{dv}{dt}$

i w przysp. normalne $A_3A_5 =$

$$A_3A_5 + \delta_1 : A_2A_3 + \delta_2 = A_2A_3 + \delta_2 : R \qquad = \frac{(A_2A_3)^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

Może Panom się ten sposób argumentacji wydawać nieścisłym — bo przyjmowaliśmy kąt $A_4A_5A_3$ jako prosty, $A_2A_5 = A_2A_3 = v$ etc., ale jest ona przecież całkiem prawidłową, bo ~~zaniedbaliśmy~~ błędy które przez te przypuszczenia zrobiliśmy są ~~wyższego~~ mniejszego rzędu wielkości niż odcinki A_1A_2 same, więc jeżeli przechodzimy do granicy t.j. jeżeli A_1A_2 nieskończenie małe, to one znikają kompletnie.

Tego rodzaju rozważania napotyka się codzienie w zastosow. r.n. do geometrii

Jeżeli więc zmuszamy punkt ~~t~~ materyalny aby się poruszał w kole n.p. przywiązując go do sznurka (punkt!), to musimy wywierać nań siłę $m\frac{v}{R^2}$ a więc zdaje się jak gdyby on wywierał na sznurek siłę tak zwaną siłę centryfug

31/ W początku wydaje się dziwnem, że przy ruchu ~~po~~ z jednostajną prędkością

występuje przysp. – ale polega to tylko na ~~niewłaściwem utworzeniu po~~ tem

że nazwa przysp. jest niewłaściwa; byłoby lepiej nazwać tę wielkość inaczej

n. p. zmiennością – ale ów wyraz jest już zanadto utarty. 31

Może nie jest zbytecznem ostrzedz na tem miejscu że w równaniach ruchu (w spółrzędnych prostych) nie

należy dodawać jeszcze siły centryfugalnej do sił działających na punkt

Byłoby absolutnie fałszywe ~~$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{mv^2}{R}\cdot\cos\alpha$~~ ..

bo to pojęcie można tylko zastósować, jeśli chodzi o równanie ruchu w

spółrzędnej s. . W powyższej formie jest też siła już zawarta w wyrazie

$m\frac{d^2x}{dt^2}$, (który można uważać jako siłę bezwładności.)

Nieskończona ~~ilość~~ jest ilość różnych gatunków spółrzędnych, które używa się

~~w~~ geometryi. ~~Jak~~ W pojedyńczych wypadkach ~~są~~ są te lub owe korzystniejsze

Łatwo wtedy wyrazić przysp. i siłę w nich za pomocą ogólnych

wzorów dla ~~zmiennienia~~ wprowadzenia innych zmiennych.

~~Najprostszy~~ N. p.: Najczęstszy przypadek; ~~po~~ spółrzędne jednobiegunowe (w płaszczyźnie)

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$
$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}$$

Z czego możnaby utworzyć całkowite przysp. $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

To zaś niepotrzebne, bo zwykle używamy wtedy jednak biegunowych współrzędnych, gdy siła jest skierowana ku pewnemu biegunowi.

Więc będzie nas interesować rozkład przysp. w kierunku promienia i w kierunku prostopadły do niego.

$$w_r = \ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$w_\varphi = \ddot{y}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right)$$

Później jeszcze kiedyś z tych wyrażeń będziemy robili użytek.

Pojęcia pędu, energii etc., które przedtem wprowadziliśmy przy ruchu prostym i tutaj można zastosować.

Pęd = mv (wielkość kierunkowa)

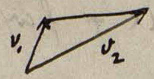
Energia kinetyczna = $\frac{1}{2} m v^2$ (wielkość bezkierunkowa, bezwzględna)

Popęd = $\int f\,dt$ ale ponieważ to f teraz różne kierunki ma, trzeba by użyć sumowania geometrycznego, dla tego wygodniej rozłożyć je:



$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \int_1^2 X\,dt = m\frac{dx_2}{dt} - m\frac{dx_1}{dt}$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \int_1^2 Y\,dt = \underbrace{m\frac{dy_2}{dt}}_{m v_1} - \underbrace{m\frac{dy_1}{dt}}_{m v_2}$$



Więc i tutaj: Popęd = geometryczna różnica między pędami w dwóch punktach, ~~geometr~~

A siła w X = ~~różnica~~ pochodna składowej pędu według czasu } siła = geometryczna pochodna pędu.

Y = . . . ——

Pracę siły określiliśmy tam jako całkę z iloczynu z siły i drogi.

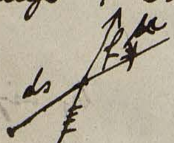
~~Równice i trudy~~

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Big| \; dx \qquad \int X\,dx = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + c_1$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \Big| \; dy \qquad \int Y\,dy = \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + c_2$$

$$\underbrace{\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)} = \frac{m}{2}v^2 + c$$

To jest algebraiczna suma prac wykonanych przez składowe, więc praca jeśli nie jest porównywalna ~~...~~ przy działaniu samego X, potem samego Y etc. , ~~ale to też równe pracy przy działaniu równoczesnym~~



Tutaj wprowadzimy dokładniejsze określenie:

Praca = $\int$ drogi i siły wypadającej w kierunek drogi



$$P = \int_0^1 ds\, f\cos\mu = \int(f\,ds)$$

gdzie α = kąt między ~~kierunkiem~~ styczną i siły

$$\cos\mu = \cos\alpha\frac{dx}{ds} + \cos\beta\frac{dy}{ds} + \cos\gamma\frac{dz}{ds}$$

$$P = \int_0^1 f\cos\alpha\,dx + f\cos\beta\,dy + \ldots = \int_0^1 X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

Siła się rozkłada w jedną składową prostopadłą (w kierunku stycznej) i drugą wspierającą drogę

To też w inny sposób można otrzymać:

Więc różnica energii kinetycznej między dwoma punktami drogi równa się pracy przez siłę między niemi wykonanej, przy czem jeszcze raz powtarzam:

praca = $\int$ drogi × siła składowa w kierunku drogi

Szczególnie ważny przypadek jeżeli f zależy tylko od miejsca (x, y, z), w taki sposób że $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $\quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ $\quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

Wtedy $P = -\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = -(U_1 - U_0)$

Więc wtedy wartość pracy nie zależy wcale od kształtu drogi, jeżeli ta tylko ~~przechodzi przez~~ rozciąga się między punktami 1 i 2

Wtedy więc egzystuje funkcya U (— funkcya miejsca (xyz), —) tego gatunku że praca wykonana między dwoma punktami równa ~~się~~ różnicy tej funkcyi.

U nazywamy wtedy potencyałem, czyli energią potencyalną

~~N.p.~~ A tamto równanie można napisać:

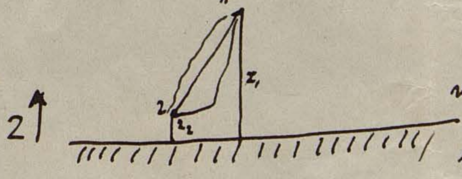
$U_1 + \frac{m}{2}v^2 = U_0$ Punkt 0 możemy uważać jako stały, 1 jako ruchomy punkt odnoszenia, 1

wtedy: Summa energii potencyalnej i energii kinetycznej = stała (Jeżeli egzystuje wogóle energia potencyalna)!

N.p. Grawitacya na ziemi

$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg \qquad \int Z\,dz = -\int mg\,dz = -mgz + c \qquad U = C + mgz$

Więc jeżeli



na wszystkich tych drogach praca (równa tej samej) mg (różnicy wysokości nad poziomem)

więc także jeżeli jakimś sposobem punkt przejdzie z 1 do 2 to tę samą energię kinetyczną, więc i tę samą prędkość będzie miał.

Punkta gdzie U tę samą wartość posiada można powiązać powierzchnią = powierzchnia poziomu (Äquipotentialfläche) (Niveaufläche

35) Podobnie siły elektrostatyczne mają potencyał, podobnie wogóle siły które są tylko funkcyami odległości od pewnego centrum. $f = \frac{1}{r^5}$ ~~do~~ $\frac{1}{r^2}$ etc. siły Newtonowskie, Maxwellowskie, sprężyste.

Takie siły wogóle nazywamy siłami konserwatyjnemi bo one ~~konserwują~~ (zachowują) energię.

~~Ale~~ Egzystują także inne tak zwane rozpraszające (dispersi), ponieważ rozpraszają energię (co to znaczy teraz nie można wytłomaczyć). N. p. opór ośrodka, tarcie, wogóle siły które ~~zależą~~ są funkcyami prędkości v. N. p.: kv

Wtedy oczywiście jeżeli bardzo powoli z 1 do 2 porusza się punkt bardzo powoli siła oporu bardzo mała, jeżeli prędko to wielka, więc i praca wielka. Wtedy i praca różna na różnych drogach.

Charakterystyczną cechą tych sił ~~jest że~~ rozpraszających jest, ~~że~~ że praca zmienia się częściowo przynajmniej w ciepło (jak przy tarciu). Energia potencyalna zawsze ~~...~~ może się zamienić w energię kinetyczną, ale ta energia która się zamieniła raz w ciepło jest dla mechaniki stracona. Dokładniejsze zbadanie tych zjawisk wchodzi w zakres Termodynamiki.

$m\frac{dv}{dt} = \mathfrak{f} = m\frac{d^2r}{dt^2}$ $\qquad \int(dr.\nabla U) = \int_2^1 dU = U_1 - U_2$

$\int(\mathfrak{f}\, dr) = \frac{m}{2}\left|\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right|$

Przykłady.

Pierwszego rodzaju bardzo proste. Jeżeli mamy $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ wtedy $X = m\varphi''(t)$, $Y = m\psi''(t)$

Trudności tylko czasem z tego pochodzą, że formy funkcyi φ, ψ, nie są bezpośrednio dane, jak n.p. w wypadku klasycznym ruchu planet. Ponieważ tam różne trudności, więc to zostawimy sobie na koniec. Najprzód kilka przykładów drugiego rodzaju.

Rzut ukośny:

~~[illegible]~~ $X = 0 \quad Y = -mg$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

od siebie całkiem niezależne

$$x = a_1 + b_1 t$$

$$y = a_2 + b_2 t - g\frac{t^2}{2}$$

4 stałe dowolne!

Układ spółrzędnych tak że: $t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ więc $a_1 = a_2 = 0$

$$x = b_1 t \qquad \dot{x} = b_1$$

$$y = b_2 t - g\frac{t^2}{2} \qquad \dot{y} = b_2 - gt$$

Dajmy na to że wyrzuciliśmy ów punkt z prędkością b pod kątem α wtedy jej składowe: $b\cos\alpha = b_1$ i $b\sin\alpha = b_2$

więc: $x = b\cos\alpha . t$

$y = b\sin\alpha . t - g\frac{t^2}{2}$ Parabola skierowana ku dołowi.

Dyskusya: y będzie wzrastało tak długo jak $\dot{y} > 0$ więc aż $t = \frac{b\sin\alpha}{g}$

wtedy największa wysokość: $h = \frac{b^2\sin^2\alpha}{2g}$, potem znów

zmniejsza się aż przedzie znów przez oś X:

$y=0$: $b \sin\alpha = g\frac{t}{2}$ $t = \frac{2b\sin\alpha}{g}$ } więc spada tak samo długo jak się wznosiło

x temu odpowiadające: $x_d = \frac{2b^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{b^2}{g}\sin 2\alpha$

= doniosłość rzutu

Z tego wynika: x_d będzie rosło z α aż do 45°, tam największe potem znów maleje aż do $x_d = 0$ dla $\alpha = 90°$.

Punkt w który się ugodzi trafi pod α, można także trafić pod $90-\alpha$

bo $\sin 2(90-\alpha) = \sin 2\alpha$

Zastosowanie w artylerii, armaty, moździerze

Co do prędkości: ~~wtedy samo~~ Ze zasady energii już wynika:

energia kinetyczna w punkcie 0: $= m\frac{b^2}{2}$

zmniejsza się o mgz, potem znów powiększa, tak że równa w równym poziomie, tak samo i prędkość. Łatwo też sprawdzić bezpośrednio

istotnie $\dot{x} = c\cos\alpha$ $\dot{y} = c\sin\alpha - gt$ $v^2 = c^2 + g^2t^2 - 2cgt\sin\alpha = c^2 + 2gy$ $\frac{mv^2}{2} + mgy = \frac{mc^2}{2}$

2). Uwzględniając opór ośrodka: Przyjmując go prop. do prędkości.

$$X = -kv\frac{dx}{ds} = -k\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$Y = -mg - kv\frac{dy}{ds} = -mg - k\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$
} od siebie niezależne

Pierwsze tak jak dawniej: $x = \frac{am}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$

$y = \ldots - gt\frac{m}{k} + \ldots + \ldots\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$

Drugie: $y - \frac{gt}{k} = z$

$-gt = ky - m\frac{dy}{dt}$

$\frac{dz}{dt} = z - \alpha$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\beta} + e^{-\beta t}\left(b\cos\alpha + \frac{g}{\beta}\right) = e^{-\beta t} b\cos\alpha + \frac{g}{\beta}\left(e^{-\beta t} - 1\right)$

[illegible] $= y - \frac{g t}{\beta} + \frac{b\cos\alpha\,(1-e^{-\beta t})}{b\cos\alpha\,\beta}$

~~$\ldots$~~ Za czasu $t=0$: $y = x = 0$, $\dot{y} = b \sin\alpha$, $\dot{x} = b \cos\alpha$

$$\beta = \frac{k}{m}$$

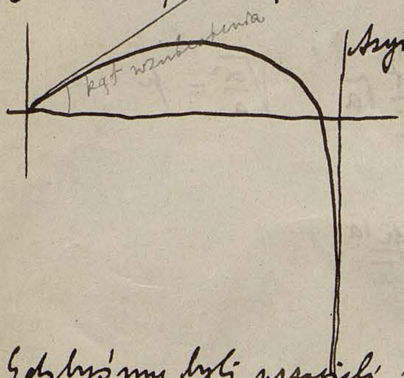
$$a = b\cos\alpha$$

$$-g\frac{m}{k} + c\frac{k}{m} = b\sin\alpha \qquad c = \frac{m}{k}\, b\sin\alpha + g\frac{m^2}{k^2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{b\cos\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \\ y = -\dfrac{gt}{\beta} + \dfrac{1}{\beta}\left(b\sin\alpha + \dfrac{g}{\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta t}\right) \end{cases}$$

dla $y=0$ $\quad 1 - e^{-\beta t} = \dfrac{\beta t}{b\sin\alpha + \frac{g}{\beta}}$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\beta t}\, b\sin\alpha + \frac{g}{\beta}\,\frac{\beta t}{b\sin\alpha + \frac{g}{\beta}}$$



Krzywa niesymetryczna
(balistyczna)

x nie może przekroczyć pewnej granicy

Gdybyśmy byli przyjęli inną funkcję na miejscu pierwszej potęgi prędkości to byłoby zadanie daleko trudniejsze. W praktyce, w artylerii: opór ma bardzo wielki wpływ przy wielkich prędkościach początkowych (600 m) ale tej komplikacji nie rachuje się teoretycznie, tylko mierzy się doświadczalnie, a rezultaty umieszcza się we formie tablic (tak jak logarytmy).

Kształt pocisków ogiwalny

niemieckie Infanteriegewehr 1888 $\quad c = 620$ m

wypadłaby donośność pod 45° – ~~40 km~~

podczas gdy rzeczywista maksymalna donośność pod 32°: 4 km

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

$$\frac{m\,dv}{mg + kv} = dt$$

$$\ldots mg - k\ldots t$$

$$\frac{(620)^2}{10} = 38\,4\ldots$$

$$\begin{array}{r} 372 \\ 124 \\ \hline 38'4\text{ km} \end{array}$$

39

3). Punkt, który dwie siły sprężyste dążą sprowadzić w oś X i Y. N.p. Koniec sztaby o przekroju prostokątnym, prostopadłej do tablicy. (Kaleidophon)

Siły sprężyste tem się odznaczają że są proporcyonalne do wychylenia z położenia spoczynku; więc:

$$\left.\begin{aligned} X = m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\alpha^2 x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\beta^2 y \end{aligned}\right\}$$ niezależne od siebie i tej samej formy, więc n.p.:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\alpha^2 x^2 + a$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a-\alpha^2x^2}} = \frac{dt}{\sqrt{m}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a}}\,x\right)^2}} = \frac{dt}{\sqrt{m}}\sqrt{a} \qquad \sqrt{\frac{\alpha^2}{a}} = p$$

$$\frac{p\,dx}{\sqrt{1-(px)^2}} = \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{m}}dt$$

$$\arcsin(px) = \frac{p}{\sqrt{m}}t + A$$

$$x = \frac{1}{p}\sin\left(A + \frac{\alpha}{\sqrt{m}}t\right)$$

$$y = \frac{1}{q}\sin\left(B + \frac{\beta}{\sqrt{m}}t\right)$$

Najprostszy przypadek jeśli $\frac{\alpha}{\sqrt{m}} = \frac{\beta}{\sqrt{m}} = \gamma$

Początek czasu możemy tak wybrać że:

$$x = \frac{1}{p}\sin\gamma t$$

$$y = \frac{1}{q}\sin(\gamma t + \delta)$$

δ = faza

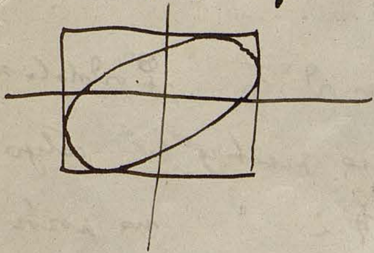
drganie złożone z dwóch o tej samej systemie drgań z których jedno wyprzedza drugie o δ

Ruch złożony z dwóch ruchów harmonijnych = drgających; ruch $x = \frac{1}{p}\sin\gamma t$ jest ruchem okresowym x przybiera te same wartości, i cały ruch tak samo się powtarza po upływie

czasu $\tau = \frac{2\pi}{p}$ = okres. Największość = amplituda = obszerność wychyleń $= \frac{1}{p}$

obszerność zależy więc od stałej a, t. j. stałej ~~która~~ równej ($m v_x^2$) w punkcie $x=0$. Okres atoli od niej niezależny.

Dwa takie ruchy o tym samym okresie dają jako składowy ruch eliptyczny. Łatwo dowieść tego wyrugując t z powyższych równań.



~~jeżeli~~ Jeżeli $\delta = \frac{\pi}{2}$, osi elipsy ~~leżą~~ w osiach XY

$p = q$ będzie koło

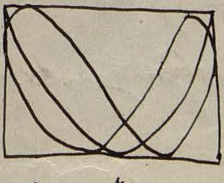
Jeżeli $\delta = 0$ będzie prosta w kierunku przekątnej

Wtedy i prędkość połowa stała, a siła skierowana ku środkowi.

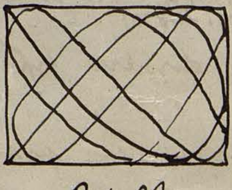
Jeżeli zaś $\alpha \gtrless \beta$ wtedy skomplikowane figury; jeżeli α i β są w stosunku oznaczonym przez jakieś liczby całkowite ~~[illegible]~~, to po pewnym

$\alpha : \beta = n_1 : n_2$

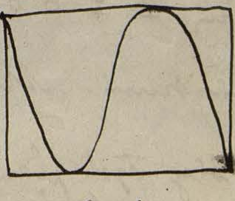
czasie ~~[illegible]~~ $t = \frac{2\pi}{\alpha} n_1 = \frac{2\pi n_2}{\beta}$ cały ruch się powtórzy, więc i on jest okresowym. = figury Lissajou'a (Zobacz Witkowski pag. 63)



$2\alpha = \beta$



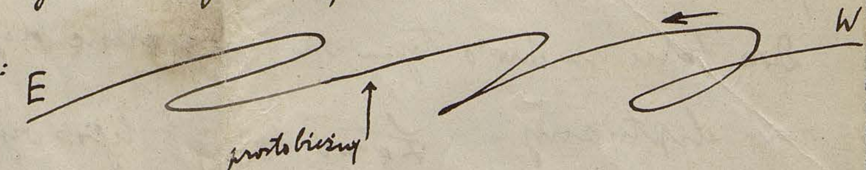
$3\alpha = 2\beta$



$3\alpha = \beta$

Ruch planetowy.

Planety, jak wiadomo odróżniają się od reszty gwiazd tem że zmieniają ~~ich~~ swe miejsce pośród nich. Ale zawsze pozostają w bliskości t.zw. ekliptyki (pas zwierzyńcowy). ~~Dojrzeliśmy się rodzaju~~ Wspólna cecha że zakreślają ruchy tego rodzaju:



ale dwojakiego rodzaju:

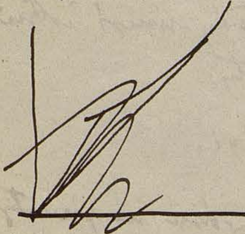
☿ i ♀ zawsze pozostają w niewielkiej odległości od słońca; ♀ oddala się aż do 42°, ☿ aż koło 29° i z nim razem kończą przebieg koło całego nieba w ciągu jednego roku. Pozostałe ♂ ♃ ♄ i na pozór nie zdają się troszczyć o pozycję słońca, one wędrują wiele powolniej i potrzebują dłuższego okresu aby skończyć przebieg cały (♃ koło 11 lat). Ptolemäus i inni starali się opisać ten bieg za pomocą epicykloidów i innych ale mimo ogromnie skomplikowanych konstrukcyj nie bardzo się to udawało. Dopiero Kopernikus wykazał że ten szczególny kształt biegu tłomaczy się w najprostszy sposób tak że słońce stoi a inne planety w porządku ☿ ♀ ♁ ♂ ♃ ♄ koło niego się obracają z szybkościami coraz mniejszemi. Ale Kepler (1571–1630) dopiero był w stanie ilościowo dokładnie oznaczyć bieg tych planet. Sławne trzy prawa Kepplera:

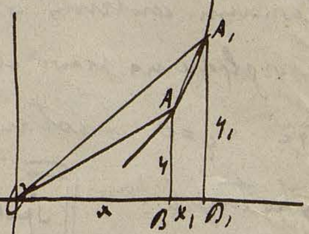
I). Planety ~~ruszają się~~ po- krążą po elipsach ~~koło~~ słońca, które ~~stoi~~ znajduje się w jednem z ich ognisk.

II) Pola zakreślone przez promień wodzący (w jednakowych czasach) są jednakowe.

III). Kwadraty czasu obiegu różnych planet ~~są~~ proporcjonalne do (wielkich osi elips)³

Stawiamy sobie więc pytanie: Na jakie prawo siły należy wnioskować z tych praw? Najpierw zajmiemy się drugim prawem. Wprowadzimy tu określenie nowego pojęcia: prędkości polowej t.j. obszaru pola zakreślonego przez promień wodzący podzielonego przez odpowiedni przeciąg czasu.





$$\Delta P = OAA_1 = OA_1B_1 + ABB_1A_1 - OAB$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{(x_1 - x)(y + y_1)}{2} - \frac{x_1 y_1}{2}$$

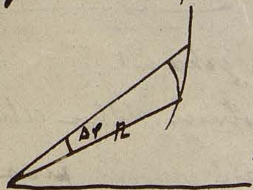
$$= \frac{xy_1 - x_1 y}{2}$$

$x_1 = x + \Delta x \qquad y_1 = y + \Delta y$

$$\Delta P = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(x\frac{\Delta y}{\Delta t} - y\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \qquad P' = \text{prędkość polowa} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

Tego wzoru tu nie będziemy używali, tylko wyprowadzimy go dla ścisłego wyniku. Tutaj oczywiście korzystniej użyć współrzędnych biegunowych.



$r\,\Delta\varphi$ (właściwie $r \sin \Delta\varphi$)

$$\lim\left(\frac{1}{2}\,\frac{r^2\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\, r^2\frac{d\varphi}{dt} = P'$$

co także z poprzedniego wzoru otrzymuje się, wkładając $\frac{dy}{dt}$ i $\frac{dx}{dt}$ ze wzorów dawniej wyrachowanych.

Drugie prawo żąda więc żeby ta prędkość P' była stała. (T.j. prędkość największa w perihelium, najmniejsza w aphelium)

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c$$

Co to znaczy łatwo pokazać wracając do dawniej wyprowadzonych

$$w_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \text{i} \quad w_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

Mamy więc: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$ a zatem $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2c}{r^3}\frac{dr}{dt}$

więc $w_\varphi = 0$

Więc składowa przyspieszenia, więc i siły prostopadłe do promienia wodzącego równa zeru a więc całe przyspieszenie a więc i siła działa tylko w kierunku promienia wodzącego, t.z. siła jest centralną.

Ruch tego rodzaju nazywamy centralnym. Łatwo dowieść i odwrotnie że jeśli siła zawsze skierowana ku pewnemu centrum wtedy musi istnieć i owo prawo zachowania pól, bez względu na prawo siły.

W spółrzędnych biegunowych składowa $w_\varphi = 0$ i całkując.

Dla odmiany w spółrzędnych prostokątnych:

[Sprawdzić w przeszłym zadaniu dla $\alpha \neq \beta$!]

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(r, \frac{dr}{dt}, t \text{ etc.}\right) \frac{x}{r} \quad \Big| \; -y$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = f\left(r, \frac{dr}{dt}, t \text{ etc.}\right) \frac{y}{r} \quad \Big| \; +x$$

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0 = \frac{d}{dt}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right)$$

A zatem $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{stała}$

Drugie prawo: $r = \frac{p}{1+\varepsilon \cos\varphi}$

Teraz nas interesuje jakie jest to prawo siły skierowanej ku słońcu. W tym celu trzeba użyć owego wyrazu dla w_r. Będziemy się starali wyrazić wszystko przez $\frac{p}{r}$.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p\varepsilon}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon r^2 \sin\varphi}{p} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon c}{p} \sin\varphi$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\varepsilon c}{p} \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{p}\left(\frac{p}{r}-1\right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^2}{p r^2}\left(\frac{p}{r}-1\right);$$

więc $w_r = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{pr^2} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{c^2}{pr^2}$

Więc siła będzie $\frac{mc^2}{p} \frac{1}{r^2}$ skierowana ku słońcu.

Trzecie prawo: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \lambda$

Z drugiego prawa wypływa: czas całego obiegu $T = 2\frac{ab\pi}{c}$ =

Więc dla wszystkich planet:

$\frac{T^2}{a^3} = \lambda \qquad \frac{4\pi^2 b^2}{c^2 a} = \lambda = \frac{4\pi^2}{c^2} p$

~~$\frac{4a^2 \pi^2 (1-\varepsilon^2)}{c^2} = \lambda$~~ więc $\frac{4a(1-\varepsilon^2)\pi^2}{c^2} = \lambda = \frac{4\pi^2 p}{c^2}$ więc $\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2}{\lambda}$

więc dla wszystkich planet $w_r = -\frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{1}{r^2}$ a siła $= -\frac{4\pi^2}{\lambda}\frac{m}{r^2}$

Trzecie prawo Keplera nie stosuje się dokładnie, mianowicie 4 ~~[illegible]~~ trochę prędzej się porusza (koło $\frac{1}{1000}$ części) niż z niego by wypływało. To nie polega jednak na niedokładności prawa Newtona tylko na tem że słońce samo nie jest punktem stałym, jak to później pokażemy. Wtedy też odwrotne zadanie rozwiążemy: znaleźć kształt drogi pod działaniem sił Newtonowskich.

Aż dotąd zajmowaliśmy się wyłącznie punktem materyalnym, całkiem swobodnym. Przejdziemy do zadań aby znaleźć ruch punktu, na który działają zewnętrzne siły, jeżeli on jest zmuszony pozostać na pewnych liniach lub powierzchniach, ~~lub~~ jeżeli przez jakiekolwiek sztywne połączenia w ~~[illegible]~~ swobodzie ruchu jest ograniczony (n.p. części maszyny) więc

Wtedy on oczywiście porusza się zwykle inaczej jak gdyby był całkiem wolny, gdyż owe sztywne połączenia ~~[illegible]~~ jeżeli punkt wskutek działania sił ~~[illegible]~~ chce ~~[illegible]~~ się poruszać wbrew ~~[illegible]~~ ich działaniu ~~[illegible]~~ na niego takie siły wywierają że zmuszają go pozostać na danej linii lub ~~[illegible]~~ powierzchni.

Można takie zadanie rozwiązać bezpośrednią metodą rozkładając siłę wypadkową zewnętrzną na składową wzdłuż ~~[illegible]~~ linii lub powierzchni i na normalną do niej. Ta ostatnia zostaje zniszczona wskutek przeciwdział

Takie

więc punkt porusza się tylko w skutek owej pierwszej składowej. Tą metodą rozwiążemy później kilka przykładów (np. zostały sposób wyprowadzania równań ruchu)., że wolę wprzód wywieść inny system równań ruchu, który w tym wypadku, gdzie mamy do czynienia z jednym punktem, nie przedstawia wprawdzie szczególnych korzyści, ale będzie bardzo ważny w ogólniejszym wypadku układów punktów ruchomych, t.j. zasada prac przygotowanych. Można ją wywieść w następujący sposób:

Siły działające na punkt są: dane siły zewnętrzne XYZ i nieznane jeszcze siły wywierane przez połączenia sztywne ~~...~~ ξ η ζ, więc:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \xi$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \eta$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \zeta$$

Punkt musi może się tylko po płaszczyźnie albo po ~~...~~ krzywej; przesunięcia takie, ~~...~~ bardzo małe, zgodne z warunkami przymusowemi nazwiemy: przesunięciami przygotowanemi i oznaczymy przez δx δy δz, mnożąc owe rów.

otrzymamy: (f mnożymy) ≥ 0

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = -(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)$$

Na prawej stronie stoi praca ze sił ~~połączenia~~ przymusowych podczas przesunięcia przygotowanego, która oczywiście musi być $=0$, ponieważ one są prostopadłe do przesunięcia. Więc zasada prac przygotowanych:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + (\quad)\delta y + (\quad)\delta z = 0$$

przyczem naturalnie $\delta x, \delta y, \delta z$ jak mówiliśmy muszą być dobrane zgodnie z warunkami połączenia.

Pierwotnie znaleziono tą zasadę w trochę odmienny sposób: Punkt swobodny jest w równowadze jeżeli ~~na niego siła~~ wypadkowa sił na niego działających równa zeru (t.j. jeżeli wielobok sił zamknięty).

$f = 0$ ~~...~~ mnożąc to przez przesunięcie bardzo małe dowolne δs mamy warunek $f\,\delta s = 0$ co znaczy że praca wykonana

przy przesunięciu δs musi być równa zeru. Rozkładając ją na osie otrzymamy warunek: $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$ dla równowagi. 48

Jeżeli jednak punkt porusza się na powierzchni etc. to wystarczy dla równowagi oczywiście żeby praca przy przesunięciu w powierzchni etc. była $=0$, bo inne i tak nie możliwe; więc wtedy to samo równanie ważne pod warunkiem że $\delta x, \delta y, \delta z$ zadość czynią warunkom przymusowym.

Aż dotąd to jest warunkiem dla stanu równowagi, więc statyka.

Do dynamiki przechodzimy za pomocą zasady D'Alemberta:

Jeżeli siły zewnętrzne nie są w równowadze, tylko wywołują ruch punktu, to przecież byłyby one w równowadze, gdybyśmy dodali do nich jeszcze taką samą — ale przeciwną — siłę, jak tę któraby ruch faktyczny wywołała.

N. p. wahadło: punkt przyjmie jakieś pewne $\frac{d^2s}{dt^2}$, gdybyśmy wtedy mogli dodać właśnie odpowiednie $m\frac{d^2s}{dt^2}$ toby oczywiście zostało w spoczynku.

Więc i w razie ruchu siły $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$, .. będą w równowadze, więc wkładając je do powyższego wzoru mamy to samo równanie jak przedtem: $(X - m\ddot{x})\delta x + (Y - m\ddot{y})\delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z = 0$.

W jaki sposób teraz najogólniej uwzględnić warunki przymusu dla $\delta x, \delta y, \delta z$:

Warunki można napisać we formie $f(x,y,z) = 0$ (jeden lub dwa)

$\varphi(x,y,z) = 0$

[ogólniejszych warunków np. $\varphi(x\,y\,z, \dot{x}, t)$ nie uwzględniamy]

Różniczkując je:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = 0$$

} mamy warunki którym $\delta x, \delta y, \delta z$ muszą zadość uczynić

(bo wtedy $\delta x \delta y \delta z$ prostopadłe do normalnej)

47 Chodzi więc o eliminacyę δz równań. Czyni się to najprościej za pomocą t. zw. nieokreślonych mnożników (Unbestimmte Multiplicatoren). Pierwsze pomnożyć przez λ a drugie przez μ i dodać, potem wybrać λ i μ tak że $(\ )\delta y$ i $(\ )\delta z$ znikną; wtedy musi i $(\ )\delta x = 0$.

Więc w tym razie (ruch po krzywej):

$$\left.\begin{aligned} X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x} &= 0 \\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y} &= 0 \\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Więc λ jest siła oporna $\times \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \dots}$

Jeżeli zaś tylko jedno równanie, wtedy λ tak dobrać że $(\ )\delta z = 0$, wtedy ponieważ δx i δy już teraz całkiem dowolne, więc i

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{etc. etc.}$$

Przykłady:

1). Równia pochyła. Właściwie jest to ruch po powierzchni ale ~~ponieważ~~ oczywiście będzie się odbywał w prostej, więc tylko 2 osi.

$y = A - bx$

~~$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0$~~ $\quad X = 0 \quad Y = -mg$

$= a - tg\,\varphi . x$

$$\left(0 - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(-mg - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0$$

$$b\,\delta x + \delta y = 0$$

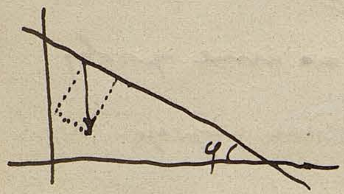
$$\left.\begin{aligned} \lambda b - m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ \lambda - mg - m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} = \lambda - mg + mb\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \;\Big|\; b$$

$$mgb - m(b^2+1)\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{więc}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b}{b^2+1}\, g = g \sin\varphi \cos\varphi \quad \Big\| \quad s = \frac{x}{\cos\varphi}$$

więc $\dfrac{d^2 s}{dt^2} = g \sin\varphi$

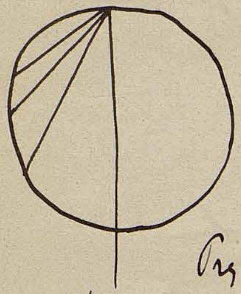
Naturalnie w tym wypadku bezpośrednio prościejsza jest metoda bezpośrednia



Więc tak samo jednostajnie przysp. ruch jak przy spadaniu, tylko przysp. w stosunku $\sin\varphi$ mniejsze.

Jeżeli prędkość początkowa $= 0$: $s = \dfrac{g t^2}{2} \sin\varphi$

W równych czasach będą punkty spadały na różnych pochyłościach tak że znajdują się na obwodzie koła.



$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g^2 t^2 \sin^2\varphi = 2 g s \sin\varphi = 2 g h$$

Prędkość ostateczna zależy tylko od różnicy poziomu, nie od pochyłości, co zresztą wypływa już z zasady energii.

---

2). Wahadło zwykłe. Punkt materyalny umocowany na końcu sznurka o stałej długości lub ~~[illegible]~~ ślizgający się na powierzchni wklęsło-kulistej. Przyjmujęc że ruch odbywa się w płaszczyźnie.

$X = 0 \quad Y = -mg$ } siły

$x^2 + y^2 = a^2$ } warunek dla $\delta x\, \delta y$ $= x\,\delta x + y\,\delta y = 0$

tak samo też: $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$

$$\left.\begin{aligned} -m\ddot{x}\,\delta x &+ (-mg - m\ddot{y})\,\delta y = 0 \\ x\,\delta x &+ y\,\delta y = 0 \end{aligned}\right| \lambda$$

z czego, skądże $(\ ) = 0$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + \lambda x &= 0 \\ m\ddot{y} + mg + \lambda y &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} \dot{x} \\ \dot{y} \end{aligned} \rightarrow m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) + mg\dot{y} = 0$$

A zatem całkując:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + gy = c$$

Oczywiście tu dogodniej wprowadzić układ biegunowy



$x = a \sin\varphi$

$y = a(1-\cos\varphi)$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ A zatem: $\frac{1}{2}a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c - ga(1-\cos\varphi)$

Do tego samego równania mogliśmy dojść także i na inne sposoby:

β). Z tej samej zasady prac przygotowanych ale nie używając owych mnożników nieokreślonych λ, tylko wprost wprowadzając warunek między δx, δy:

$$+m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \left(mg + m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0 \qquad \delta y = -\delta x\cdot\frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \left(g+\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{x}{y}\right)\delta x = 0$$ A ponieważ wtedy δx dowolne:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = gx$$

$$= \frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = ga\sin\varphi = a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ (ponieważ $r=a$ stałe)

A całkując, pomnożywszy przez dφ:

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - ga\cos\varphi$$

(C w tym razie $= c+ga$)

γ) Przez bezpośrednie rozłożenie siły na składową normalną t.j. w kierunku promienia wodzącego i na składową styczną.

Ostatnia $mg\sin\varphi = m w_\varphi = m a\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ A zatem tak samo jak przedtem

δ). Bezpośrednio ze zasady energii.

$$m\frac{a^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C' - mgy \quad \text{i.t.d.}$$

takie bezpośrednie rozłożenie: $m\frac{dv}{dt} = F_s = m\frac{dv}{dt}$, $m\frac{v^2}{r} = \Sigma F_n$ Routh ogólnie

Dalszy rachunek:

Najprostsza forma:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c + \frac{2g}{a}\cos\varphi$$ | Stałą c i tak dopiero później określimy

Albo taki zakres: $\cos\varphi - \cos\varphi_0 = -\frac{\varphi^2 - \varphi_0^2}{2}$

$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$

$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} = x = \sin\psi$

$$t + b = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{c + \frac{2g}{a}\cos\varphi}}$$

To da się sprowadzić z łatwością na t. zw. całki eliptyczne, więc t będzie równe całce eliptycznej z kąta φ; a φ będzie funkcyą eliptyczną czasu t.

W przybliżeniu jednak można dla małych wychyleń φ położyć $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \left[+ \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right]$

$$t + b = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{c - \frac{g}{a}\varphi^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int \frac{d\,\varphi\sqrt{\frac{g}{ac}}}{\sqrt{1 - \left(\varphi\sqrt{\frac{g}{ac}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\arcsin\left(\varphi\sqrt{\frac{g}{ac}}\right)$$

Więc $\varphi = \sqrt{\frac{ac}{g}}\,\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,(t+b)$

Stałe c i b są dowolne; b można = 0 położyć, wtedy za czas t=0 będzie punkt w pozycyi równowagi, lecz będzie przekraczał ją z prędkością kątowej początkową $\dot\varphi = \sqrt{c}$, jeżeli nam o wielkość stałe nie chodzi, możemy dla uproszczenia położyć $\sqrt{\frac{ac}{g}} = A$ więc

$$\varphi = A\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$ gdzie A = największe wychylenie możliwe = amplituda

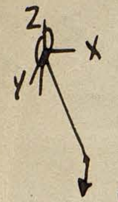
Ruch periodyczny (okresowy); okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ bo wtedy
$\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \dots\right]$ $\sin\frac{\varphi}{2}$

$$\sin\left(t + 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\right)\sqrt{\frac{g}{a}} = \sin t\sqrt{\frac{g}{a}}$$ więc ruch tak samo się powtarza

Okres nie zależy od amplitudy, co właśnie stanowi ważność ruchu wahadłowego jako regulatora dla zegarów. Ale jest to tylko z pewnem przybliżeniem ważne t.j. tak długo, jak wahania są tak małe, że, jak powyżej, można zaniedbać $\frac{\varphi^4}{4!}$ wobec $\frac{\varphi^2}{2}$

51)

3). Wahadło sferyczne $x^2+y^2+z^2=a^2$



$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x - m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y - \left(mg + m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0$$

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = 0 \qquad \Big|\ \lambda$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g + \lambda z = 0$$

Naturalnie także bezpośrednio:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r} \qquad \left(\text{więc } \lambda = \frac{N}{mr}\right)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{r} - mg$$

$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ więc prędkość obszarowa stała, co zresztą się rozumie ponieważ siła zawsze skierowana ku osi Z

$\frac{d^2x}{dt^2}dx + \dots + g\frac{dz}{dt} = 0$ bo $x\frac{dx}{dt} + \dots = 0$

więc $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + gz = C$, co też bezpośrednio ze zasady energii

Najdogodniej teraz wprowadzić układ biegunowy sferyczny przez co będzie

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c = a^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

$$C = ga\cos\theta + \frac{1}{2}a^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

Całkowanie tych równań wymaga znajomości funkcyj eliptycznych, dlatego tutaj zajmiemy się tylko tym szczególnym wypadkiem jeżeli ruch odbywa się prawie w płaszczyźnie równoległej z XY, więc jeżeli z przybliżenie stałe.

Wtedy $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$ zatem $\lambda = -\frac{g}{z}$, zatem $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{z}x \ \Big|\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{z}y$

co jest specjalny przypadek naszych równań $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 x$ $m\frac{d^2y}{dt^2} = -\beta^2 x$

gdzie $\alpha^2 = \beta^2 = \frac{gm}{z}$ Wtedy znaleźliśmy że ruch wtedy jest eliptyczny i okresowy a czas okresu $\tau = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{z}{g}}$. Zatem jeżeli wychylenia w ogóle bardzo mało wtedy okres niezależny od kształtu drogi i od prędkości początkowej. Jeżeli zaś wychylenia wielkie ale tak że ruch w płaszczyźnie wahadło stożkowe, wtedy okres odpowiada wahaniu wahadła o długości z.

Gdyby zasada prac przygotowanych była ograniczoną do mechaniki punktu, toby z niej nie było wielkiej korzyści, ponieważ, jak widzieliśmy w owych przykładach, często wiele prędzej przyjdzie się do celu bezpośrednią metodą. 51

Ale można ją tak samo też zastosować do ~~ogólniejszego przykładu~~ układów punktów, gdzie inaczej rzecz już bardzo trudna.

Będziemy mieli dla każdego punktu tak samo jak przedtem:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \xi_1 \;\Big|\; \delta x_1 \qquad m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 + \xi_2 \quad \text{etc.} \;\Big|\; \delta x_2$$

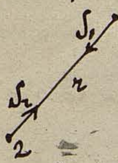
$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \eta_1 \qquad \ldots$$

$$\sum_k \left(m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} - X_k\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k \frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y_k + \left(\quad\right)\delta z_k = \sum_k \left(\xi_k \delta x_k + \eta_k \delta y_k + \zeta_k \delta z_k\right)$$

Prawa strona jest znów praca sił ~~[illegible]~~ przymusowych przy przesunięciach δx etc.

Każdy punkt można uważać jako swobodny jeżeli się doda do sił właśnie owe siły powstające wskutek oddziaływania połączeń między punktami.

Połączenia wystawiamy sobie uskutecznione n.p. za pomocą sztywnych sztab ~~[illegible]~~ łączących owe punkta których odległość ma zostać niezmienna.



Wtedy więc siły $\xi_k\ \eta_k\ \zeta_k$ działają tylko w kierunku łącznicy i z powodu równości działania i oddziaływania będą parami równe a przeciwbieżne. ~~[illegible]~~ N. p. siły połączenia między 1 i 2 wejdą w sumę powyższą jako ~~[illegible]~~ $S_1 \begin{cases} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{cases}$ i $S_2 \begin{cases} \xi_2 = -\xi_1 \\ \eta_2 = -\eta_2 \\ \zeta_2 = -\zeta_2 \end{cases}$

W owej sumie powstanie więc wskutek tego połączenia wyraz:

$$\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \eta_1 dy_1 + \eta_2 dy_2 + \zeta_1 dz_1 + \zeta_2 dz_2 =$$

$$= \xi_1 \cdot (dx_1 - dx_2) + \eta_1 (dy_1 - dy_2) + \zeta_1 (dz_1 - dz_2) =$$

Siła w X = ~~[illegible]~~ $\xi + X_2 + X_w$

$\xi_1 = \int \cos(xr) = \int \frac{(x_2-x_1)}{r}$ etc. Zatem:

$$P' = \int\left[\frac{(x_2-x_1)}{r}(\delta x_2-\delta x_1) + \frac{(y_2-y_1)}{r}(\delta y_2-\delta y_1) + \frac{(z_2-z_1)}{r}(\delta z_2-\delta z_1)\right] = \int \delta r$$

co oczywiście musi być zerem ponieważ mamy: $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+\ldots = a^2$

więc różniczkujące wyraz w nawiasach $=0$.

Zresztą zdaje się i tak już rzeczą przez się zrozumiałą że przy przesunięciach możliwych praca sił oporowych musi być $=0$, bo przecież aby praca była $\gtrless 0$ musi być nietylko siła $\gtrless 0$ ale także przesunięcie w kierunku siły $\gtrless 0$ a przecież ~~w kierunku tych sił~~ właśnie owe siły oporowe zapobiegają przesunięciu w ich kierunku. Mamy więc ogólne równanie dla układów punktów, (które obejmuje naturalnie także punkty swobodne etc.)

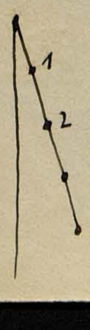
$$\sum_k\left[\left(X_k - m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k\frac{d^2y_k}{dt^2}\right)\delta y_k + \left(Z_k - m_k\frac{d^2z_k}{dt^2}\right)\delta z_k\right] = 0$$

przy czem naturalnie tak jak dawniej δx_k etc. tak muszą być dobrane aby były zgodne z warunkami.

[Wykluczone są t.zw. ~~warunki~~ połączenia jednostronne n.p. ~~Maszyna Atwooda!~~]

N. p.: Wahadło składające się ze żerdzi sztywnej ale niemasowej na której jest umocowanych n punktów o równych masach w równych odstępach.

$$x_k^2 + y_k^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 a^2$$



$$\sum_k\left[(-m\ddot{x}_k)\delta x_k + (-mg - m\ddot{y}_k)\delta y_k\right] = 0$$

$$x_k\delta x_k + y_k\delta y_k = 0 \quad ; \text{stąd}$$

$\ddot{x}_1 + \lambda_1 x_1 = 0$	$\dot{x}_1$	$\ddot{y}_1 + g + \lambda_1 y_1 = 0$	$\dot{y}_1$
$\ddot{x}_2 + \lambda_2 x_2 = 0$	$\dot{x}_2$	$\ddot{y}_2 + g + \lambda_2 y_2 = 0$	$\dot{y}_2$
$\vdots$		$\vdots$	

Choć zdaje się że mamy rzeczy więcej [illegible] wariacje tylko na zmianach ilości pośrednich [illegible] gdy [illegible] warunki ~~jednostronne~~ [illegible] (Boltzmann)

Także nieholonomiczne warunki są objęte tą zasadą.

Warunek można napisać we formie:

$$x_k = \frac{k}{n} x \qquad y_k = \frac{k}{n} y$$ } jeżeli x, y oznacza współrzędne końca wahadła

Więc zamiast używać λ w tym wypadku wiele prościej:

$\delta x_k = \frac{k}{n} \delta x$ itd. , a do tego zwykły warunek dla końca: $x^2+y^2=a^2$

Więc:

$$\sum_k \left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 \ddot{x}\, \delta x + \left(g + \frac{k}{n} \ddot{y}\right) \frac{k}{n} \delta y \right] = 0$$

$$\ddot{x}\, \delta x \sum \left(\frac{k}{n}\right)^2 + g \sum \frac{k}{n} \delta y - \ddot{y}\, \delta y \sum \left(\frac{k}{n}\right)^2 = 0$$

$$x\, \delta x + y\, \delta y = 0$$

$$\ddot{x} \sum \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \lambda x = 0 \quad \Big|\ \dot{x}$$

$$g \sum \frac{k}{n} + \ddot{y} \sum \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \lambda y = 0 \quad \Big|\ \dot{y}$$

$$(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \sum \frac{k^2}{n^2} + g \sum \frac{k}{n}\, \dot{y} = 0$$

Co zupełnie to samo równanie jest jak przy zwykłym wahadle jeżeli tam zamiast g położymy:

$$g \frac{\sum \frac{k}{n}}{\sum \frac{k^2}{n^2}} = g \frac{n \sum_1^n k}{\sum_1^n k^2} = g\, C$$ a okres $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{gC}}$

(Atwood)

Ciekawy przykład: metodą

wyrazić przez φ



$$\left(m_1 g - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) \delta y_1 + \left(m_2 g - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}\right) \delta y_2 = 0$$

$$y_1 + y_2 = \text{const}$$

$$(m_1 - m_2) g + (m_1 + m_2) \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2}$$

55 Także i w tym wypadku moglibyśmy dojść wiele łatwiej do rezultatu na inny sposób t.j. zapomocą zasady energii. Tę zasadę znamy aż dotąd tylko dla pojedyńczego punktu. Teraz dowiedziemy jej dla układu punktów a oprócz tego też zasady zachowania ruchu środka mas i zachowania pól. Są to tak zwane „ogólne całki ruchu".

Dajmy na to że mamy n punktów materyalnych, na które działają siły zewnętrzne i które mogą też oddziaływać między sobą jakiemiś siłami. W ostatnim oznaczeniu jest też już zawarty ów przypadek gdy istnieją między niemi jakieś połączenia stałe.

Nazywając wtedy $X_k\ Y_k\ Z_k$ siły wypadkowe — złożone więc ze sił zewnętrznych i wewnętrznych — działające na punkt k mamy:

$$m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} = X_k \quad \Big| \; dx_k$$

$$m_k \frac{d^2y_k}{dt^2} = Y_k \quad \Big| \; dy_k$$

$$m_k \frac{d^2z_k}{dt^2} = Z_k \quad \Big| \; dz_k$$

$$\frac{m_k}{2}\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 = c_k + \int (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)$$

Tworząc te wyrazy dla wszystkich punktów i sumując otrzymamy

$$\Sigma \ldots = \Sigma \ldots + \Sigma \ldots$$

Lewa strona = całkowita energia kinetyczna układu, którą nazwiemy T

$$T = C + \Sigma \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

a ~~praca strona~~ całka jest całkowita praca wszystkich ~~[illegible]~~ sił

Lub też:

$$T_2 - T_1 = \Sigma \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz)$$

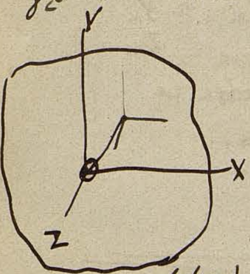
Więc różnica energii całkowitej układu w dwuch ~~punktach~~ pozycyach = praca na drodze między niemi wykonanej.

Było użyte już przy pag. ...

Zanim dalej postąpimy muszę przypomnieć Panom pojęcia pochodnych częściowych (parcyalnych) i ~~rozniczk~~ ~~pochodnej~~ różniczki całkowitej kilku zmiennych.

Aż dotąd zwykle mieliśmy tylko do czynienia z pochodnemi funkcyi jednej zmiennej według tejże zmiennej. N.p. $\frac{dv}{dt}$

Bardzo często jednak są w fizyce funkcye kilku zmiennych, mianowicie trzech spółrzędnych – a często także z czasem. Ograniczymy się teraz na pierwsze. N.p. rozkład temperatury w jakimś ciele, albo rozmieszczenie gęstości ma być dany jako funkcya miejsca $f(x,y,z)$



Chcąc wiedzieć jaka jest zmiana na linii równoległej z osią X utworzymy ~~rozniczkę~~ pochodną $= \lim \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$ w ten sposób, że y, z uważa się jako stałe a różniczkuje się tylko ~~według~~ względem x, co oznacza się symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}$. Podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

Chcąc wiedzieć zmianę podczas przesunięcia w kierunku dowolnym $\Delta s \begin{cases}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{cases}$ utworzymy

$$\lim f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \equiv$$

$$\lim \Big\{ \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)}{\Delta y}\Delta y +$$

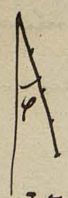
$$+ \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}\Delta z \Big\} = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

Jeżeli teraz przesuniemy punkt na jakiejbądź krzywej z 1 do 2, to

cała zmiana $f_2 - f_1 = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial s} ds = \int_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right)$

Praktykujący czasem mylnie kładzie: $\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = f_2 - f_1$ itd. tak że otrzymałby potrójną wartość. To naturalnie ~~fałszywe~~ ; $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest coś całkiem innego jak $\frac{df}{dx}$!

57 Tak. n. p. w owym przykładzie:



Prędkość punktu k $= \frac{k}{n} a \frac{d\varphi}{dt}$ | praca $= C_k + \frac{m}{n} g a \frac{k}{n} \cos\varphi$

Więc $T = \frac{ma^2}{2} \sum \frac{k^2}{n^2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ | $\sum$ prac $= C + \frac{m}{n} g a \cos\varphi \sum \frac{k}{n}$

Więc równanie analogiczne do naszego dawniejszego przy wahadle prostym

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a} \frac{n \sum k}{\sum k^2} \cos\varphi + C'$$

z czego jak przedtem wypływa, że ruch jest wahający się z okresem $T =$

Często zdarza się, że siła działająca na punkt k t. j. $F_k \begin{cases} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{cases}$ jest pochodną jakiejś funkcyi $-U$ miejsca $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$, ~~tak że~~ ~~[illegible]~~ że

$$X_k = -\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \qquad Y_k = -\frac{\partial U_k}{\partial y_k} \qquad Z_k = -\frac{\partial U_k}{\partial z_k}$$

Tak n. p. w grawitacyi: $F_k = -\frac{c}{r^2} = -\frac{c}{\sqrt{(a-x_k)^2 + (b-y_k)^2 + (c-z_k)^2}^{\,2}}$

W tym wypadku F_k jest pochodną funkcyi $\frac{c}{r} = -U_k$, bo mamy

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^2}$$ a zatem:

$$X_k = -\frac{c}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{\partial U_k}{\partial x} \quad \text{bo} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{c}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

Wtedy ową całkę można wyrachować bo $\int X dx + Y dy + Z dz =$

$$= -\int \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} dx + \frac{\partial U_k}{\partial y} dy + \frac{\partial U_k}{\partial z} dz \right) = -U_k$$

Jeśli tak utworzymy sumę wszystkich U_k dla naszych punktów to nazwiemy tą sumę $U =$ całkowitą energią potencyalną układu; wtedy więc: $T + U = C$ lub $T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1)$

Takie siły, które można wyrazić jako pochodne potencjału U nazwiemy, jak już dawniej wspomnieliśmy: zachowawczemi. Inne zaś rozpraszającemi n.p. tarcie, opór ośrodka, wogóle takie gdzie praca mechaniczna zamienia się w ciepło.

Więc jeśli działają tylko zachowawcze siły to suma energii kinetycznej i potencyalnej zostaje stałą. Lub też: jeśli układ znów wróci w zupełnie ten sam stan to też energia kinetyczna całkowita będzie ta sama (ale nie potrzebuje być tak samo rozdzielona na pojedyncze punkty.

Teraz zaprowadzimy nowe pojęcie: środek masy układu

Znajdujemy jego spółrzędne ~~[illegible]~~ jako średnie wartości masy i odległości

więc: $\xi = \frac{\Sigma m_k x_k}{\Sigma m_k}$ $\eta = \frac{\Sigma m_k y_k}{\Sigma m_k}$ $\zeta = \frac{\Sigma m_k z_k}{\Sigma m_k}$

Dodawając teraz wszystkie równania mechaniczne otrzymamy:

$$\Sigma m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma m_k x_k = \Sigma m_k \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma X_k$$

$$\Sigma m_k \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Sigma Y_k \qquad \Sigma m_k \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Sigma Z_k$$

Z ~~tego~~ formy tych równań wynika: że środek masy tak się porusza jak gdyby w nim były umieszczone wszystkie masy i wszystkie siły działające.

[Ale nie tak jak gdyby tylko na niego siła działała n.p.



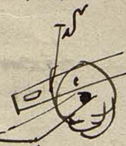
~~[illegible]~~ Przyciąganie będzie takie jak gdyby wszystkie pojedyncze siły były skoncentrowane we środku, ale to będzie inna siła niż ta, którą O wywiera w S]

59 Rozłóżmy teraz siły całkowite X Y Z na zewnętrzne i na takie które tylko między punktami układu działają t.j. wewnętrzne.

$X = X' + X''$ wtedy $\Sigma X = \Sigma X' + \Sigma X''$ a trzeba zauważyć że ~~[illegible]~~ wewnętrzne działają zawsze między parami punktów, więc wchodzi w rachunek i działanie i oddziaływanie które są równe ale przeciwne, tak że więc $\Sigma X'' = 0$.

A więc przy ruchu środka masy ~~należy~~ potrzeba uwzględnić tylko siły zewnętrzne. Wewnętrzne pozostają bez skutku. Jeśli niema zewnętrznych wtedy

$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$ więc wtedy środek masy ~~albo w spoczynku~~ porusza się w prostej linii z jednostajną prędkością.

Przykłady: armata i pocisk  (strzelba ~) Browning, Maxim

Kładąc początek współrzędnych w punkt O, mamy zawsze $mx = -MX$

więc i $v : V = M : m$ n.p. $\frac{m}{M} = \frac{1}{200}$, $v = 600$ m

$V = 3$ m trzeba hamować przez hamulce hydrauliczne i przez kliny podłożone pod koło.

Łódź i wiosła w wodzie, ptak latający, cowboy strzelający wtył z rewolweru tak prędko że leci naprzód, człowiek podskakujący na dół pchnie ziemię, układ słoneczny, shrapnel eksplodujący

wyskoczyć z małej łodzi jest trudno

$\Sigma m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma m_k x_k = \xi$.

$\xi = m \frac{d^2 r}{dt^2}$ $\quad \Sigma V v \xi = \Sigma m V v \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma V m v \frac{dr}{dt}$

---

momentów ilości ruchu
momentów współrzędnych

Zasada zachowania pól.

$m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} = X_k$	$-y$		z
$m_k \frac{d^2y_k}{dt^2} = Y_k$	x	$-z$	
$m_k \frac{d^2z_k}{dt^2} = Z_k$		y	$-x$

$m_k\left(x_k \frac{d^2y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2x_k}{dt^2}\right) = x_k Y_k - y_k X_k$

$= m_k \frac{d}{dt}\left(x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt}\right)$

$= \frac{d}{dt}\, m_k$ ~~[illegible]~~ $(x\dot{y} - y\dot{x})$

= podwójna prędkość obszarowa

Sumując:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k(x\dot{y} - y\dot{x}) = \sum(xY - yX)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\,(y\dot{z} - z\dot{y}) = \sum(yZ - zY)$$

$$\frac{d}{dt}\ \cdot\ -\ \ \ -\ \ \cdots$$

prędkość obszarową (wycinkową) pomnożoną przez masę punktu ruszającego się nazywamy momentem obszarowym, a sumę tych momentów

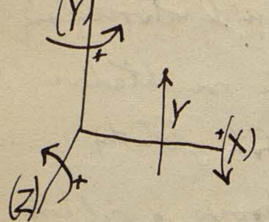
dla wszystkich punktów układu nazwiemy momentem obszarowym całkowitym

Tak że mamy więc na lewej stronie pochodne według czasu momentów obszarowych całkowitych z prędkości składowych.

Z ~~punktu~~ drugiej strony wprowadzimy teraz pojęcie momentu siły (działającej na pewien punkt) względem pewnej prostej (osi) t.j. iloczyn ze ~~wielkości siły~~ składowej prostopadłej do owej prostej i z odległości (najkrótszej) między ową prostą i kierunkiem siły. N.p. jako oś obieramy prostą prostopadłą do tablicy, a jako siłę jakąś będzie --

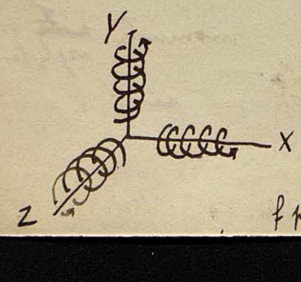


Wtedy musimy rozłożyć siłę na składową w kierunku osi i prostopadłą do niej f, a moment siły będzie iloczyn z odległości p i z siły f (t.j. podwójny obszar trójkąta). N.p. moment siły Y względem osi Z działającej na punkt odległy o x od początku jest xY (przy tem trzeba jeden kierunek ustanowić jako dodatni a przeciwny jako ujemny; tutaj będziemy uważali ten moment jako dodatni który stara się sprowadzić ~~rad~~ obrót dodatni t.j. w kierunku korkociągu (wyrwicza)



t.j. tak zwany system angielski

przeciwny nazywamy systemem francuskim



Więc względem osi Z działać może tylko siła Y, wywołująca

$$fp\sin z = fp\sqrt{(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda)^2 + (\ \ )^2 + (\ \ )^2} = \sqrt{(Xy - Yx)^2 + (\ \ )^2 + (\ \ )^2}$$

moment Yx i siła X wywołująca moment $-Xy$; więc cały moment

koło osi Z będzie; $xY - yX$

a podobnie koło X : $yZ - zY$ } co nazywamy momentami (składowemi) koło osi Z X Y

Y $zX - xZ$

~~Łatwo dowieść że moment wypadkowy równa się sumie (geometrycznej) momentów składowych.~~

~~Tam bowiem uważamy jako miarę momentu obszar trójkąta Δ~~

~~Nazywając $\alpha\beta\gamma$ kąty osi, $\lambda\mu\nu$ kąty siły:~~

~~$\Delta = \sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2}$ który równy jest obszarowi trójkąta~~

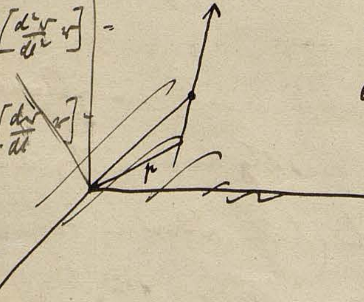
~~utworzonego z p i siły $f \sin\varepsilon$ gdzie ε = kąt między siłą f i osią $\alpha\beta\gamma$ $\lambda\mu\nu$~~

~~$= p f \sin\varepsilon = pf\sqrt{}$~~

$\frac{d^2v}{dt^2} = g$

$\left[\frac{d^2v}{dt^2} v\right]$ -

$\left[\frac{dv}{dt} v\right]$



Samte równania można więc wypowiedzieć także w tej formie: ~~zmienność (według czasu) momentu prędkości obszarowej jest równa momentowi sił~~ całkowity moment sił względem jakiejś osi jest równy zmienności (według czasu) momentu (całkowitego) prędkości obszarowej w płaszczyźnie prostopadłej do tejże osi.

Można wreszcie także uważać momenty koło $X Y Z$ jako składowe momentu sił względem pewnego punktu (bez względu na oś), który z nich utworzy się zapomocą geometrycznej summacyi t. j. przedstawiając sobie osie składowe jako długości w kierunku osi odpowiednich i tworząc z nich prostokąt; wtedy przekątnia znów będzie skazywała oś momentu wypadkowego, a wielkość jej, równa $\sqrt{(xY-yX)^2+(\ )^2+(\ )^2}$ będzie wielkością ~~mom~~ tegoż momentu ~~koło~~ względem owej osi. Moment koło pewnej osi równa wtedy (iloczynowi z) ~~owego~~ momentu ~~i z momentu wypadkowego~~ i z dostawy kąta między ich kierunkami.

W zupełnie ten sam sposób można utworzyć moment wypadkowy z momentów obszarowych.

Więc będzie można wypowiedzieć to samo zdanie także w formie:

Zmienność momentu wypadkowego całkowitego obszarowego równa momentowi wypadkowemu całkowitemu sił. (co do wielkości i kierunku)

Mamy teraz już ~~…~~ mamy ilość wielkości, które można tworzyć ze składowych przez geometryczne ~~…~~ dodawanie:

prędkość, przyspieszenie, siła, ilość ruchu, moment prędkości obszarowej, moment sił

Wszystkich tych cechą ~~…~~ wzajemną jest że są to wielkości kierunkowe; nazywamy ogólnie takie wielkości wektorami (Vectorgrößen).

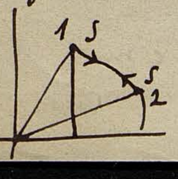
Poznaliśmy także inne wielkości, gdzie żaden kierunek nie wchodzi w rachubę, które są już oznaczone przez wielkość bezwzględną: energia kinetyczna, potencyalna, praca, masa, gęstość. Takie nazywamy skalarami.

Jeżeli jeden ze składowych momentów $=0$ wtedy mamy

$\sum \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = A$ ~~…~~ moment prędkości obszarowej w płaszczyźnie prostopadłej do osi odpowiedniej będzie stały. Jeżeli wszystkie momenty sił $=0$ wtedy i moment wypadkowy obszarowy będzie stały co do wielkości i kierunku, więc wtedy będzie egzystowała płaszczyzna w której moment obszarowy największy; ten zawsze będzie niezmienny. jeżeli 3 składowe wielkości stałe to wektor wypadkowy stały kierunek i stały wielkość

~~Przykład …~~ Należy jeszcze wspomnieć że do momentu sił przyczyniają się tylko siły zewnętrzne.

Tworząc n. p. moment koło osi Z ~~będziemy mieli~~ siła S wejdzie w następujący sposób:



$$x_1 S \frac{y_2 - y_1}{r} + x_2 S \frac{y_2 - y_1}{r} + y_1 S \frac{x_2 - x_1}{r} + y_2 S \frac{x_2 - x_1}{r} = 0$$

$\Sigma m_k [v_k\, \delta r_k] = \Sigma m_k$ $[v_1\, \delta r_1] + [(v_1 + w\delta)\, \delta r] = \ldots$

63

Widzieliśmy już jeden przykład przy ruchu centralnym gdzie prędkość wypadkowa była stałą ponieważ siły tylko wewnętrzne.

Stała prędkość obrotowa ziemi, krążek (to poznamy później jeszcze dokładniej) można by jednak zmienić długość dnia gdyby n.p. wielka ilość okrętów ~~stale~~ poczęła podróżować koło ziemi w stałym kierunku.

(Czy prądy morskie mogą działać w tym kierunku? Zdaje mi się że nie bo one powstają właśnie wskutek rotacyi ziemi, przynajmniej te które powstają wskutek zmienności temperatur N-S.)

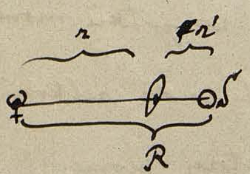
Kot spadający zawsze stanie na nogach. Spowoduje obrót koło swej osi przez ruszanie łapką 

→ Encykl. Bd. IV 6 p. 530 Marey 1894

Tylko jeden przykład jeszcze zrobimy, gdzie możemy zastosować te prawa:

Ruch planetowy, ale teraz odwrotne zadanie: znaleźć ~~drogę~~ tor jeśli jako siła dane prawo grawitacyi $k\frac{Mm}{R^2}$

Jako początek spółrzędnych ~~wyprowadzamy~~ obieramy naturalnie środek mas, który możemy przyjąć jako nieruchomy.



Wtedy już ze zasady zachowania ~~środ~~ środka masy wypływa że ♀ O ♂ będą leżały na prostej i że

$r' : r = m : M$, ~~więc wypływa~~

Siły działające są tylko wewnętrzne, więc zastosujemy zasadę pól:

~~Będzie wartość stała~~ Prędkość obszarowa wypadkowa będzie niezmienna; więc wraz z pierwszą zasadą wypływa że ~~ruch~~ droga będzie płaska.

Płaszczyznę tę obieramy jako płaszczyznę spółrzędnych jednobiegunowych

więc $m r^2 \frac{d\varphi}{dt} + M r'^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{stałe}$ $= m r^2 \frac{d\varphi}{dt}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = c\,m$

Do tego jeszcze zasada energii : $-\frac{mM'}{(r+r')^2} = \frac{-mM^3}{r^2(m+M)^2} = \frac{m M^3}{(m+M)^2}\frac{\partial f}{\partial r}$ $\quad U = \frac{Mmk}{r+r'} = -\frac{Mmk}{(1+\frac{m}{M})r}$

$$T = \frac{m}{2}\left[r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + \frac{M}{2}\left[r'^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr'}{dt}\right)^2\right] \qquad = mM\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r+r'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left(m + \frac{m^2}{M}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(m + \frac{m^2}{M}\right) = \frac{m}{2}\left[r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$= + \frac{mM}{r}\frac{k}{\left(1+\frac{m}{M}\right)} + T_0$$

$$\begin{cases} r^2\frac{d\varphi}{dt}\left(1+\frac{m}{M}\right) = c \qquad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{1+\frac{m}{M}} = \beta \\ r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2Mk}{\left[1+\left(\frac{m}{M}\right)\right]^2}\frac{1}{r} + \gamma = \frac{\alpha}{r} + \gamma \end{cases}$$

$r v \sin(r v) = \beta$

$v^2 = \frac{\alpha}{r} + \gamma$

$v^2 - \frac{\alpha}{\beta} v \sin(r v) = \gamma$

$\frac{\alpha}{\beta}\sin r v = v - \frac{\gamma}{v}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

$$+ \frac{\beta^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\alpha}{r} + \gamma - \frac{\beta^2}{r^2}$$

$$\frac{\beta^2\, dr^2}{\alpha r^3 + \gamma r^4 - \beta^2 r^2} = d\varphi^2 \qquad d\varphi = \frac{\beta}{r}\frac{dr}{\sqrt{-\beta^2 + \alpha r + \gamma r^2}}$$

$$d\varphi = \frac{\beta}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\gamma + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}}} = \frac{\beta}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\underbrace{\gamma + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}}_{A^2} - \left(\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\beta}{r}\right)^2}}$$

$$\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\beta}{r} = u \qquad \frac{\beta}{r^2}dr = du$$

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}} = \frac{d\left(\frac{u}{A}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{A}\right)^2}}$$

$$\varphi + B = \arccos\frac{u}{A}$$

$$\frac{u}{A} = \sin(\varphi + B) = \frac{\alpha}{2A\beta} - \frac{\beta}{Ar}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{2\beta^2} - \frac{A\sin(\varphi + B)}{\beta}$$

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha}{2\beta^2} - \frac{A\sin\varphi}{\beta}}$$

$$= \frac{2\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{2\beta^2}$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \qquad p = \frac{2\beta^2}{\alpha} \qquad \varepsilon = \pm\frac{2A\beta}{\alpha} \qquad \beta = \frac{r}{2}$$

[illegible]

$$\varepsilon = \frac{2\beta}{\alpha}\sqrt{\gamma + \frac{\alpha^2}{4\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{4\beta^2\gamma}{\alpha^2}} \qquad 1 - \varepsilon^2 = -\frac{4\beta^2\gamma}{\alpha^2}$$

To jest równanie wspólne dla elipsy, paraboli i hyperboli; to są więc możliwe ruchy; który nastąpi zależy od tego czy $\varepsilon \lesseqgtr 1$ ell. hyp.

więc od tego czy stała γ będzie $\lesseqgtr 0$

Owa stała oznacza ~~siłę~~ energię kinetyczną w pozycji początkowej

Jeśli więc ta energia $\lesseqgtr \frac{kmM}{r(1+\frac{m}{M})^2}$ to będziemy mieli el. par. hyp.

wcale to nie zależy jednak od kierunku ruchu w owym momencie.

Jeśli ma być koło to $\gamma = -\frac{\alpha^2}{4\beta^2} =$

To obejmuje aż dotąd I i II prawo Keplera. Trzecie prawo wyraża się co do czasu. Aż dotąd tylko kształt krzywej. Czas można wprowadzić jak to przedtem już uczyniliśmy za pomocą II prawa.

$$p = a(1-\varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}$$

Czas obiegu całego: $T = \frac{2ab\pi}{c} = $ [illegible]

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4p\pi^2}{\beta^2} = \frac{8\beta^2}{\alpha\beta^2}\pi^2 = \frac{8\pi^2}{\alpha}$$

$$= \frac{8\pi^2(1+\frac{m}{M})^2}{Mk} \qquad p\, a^3 \cdot \frac{\pi^2}{4c^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{2\beta^2}{\alpha}\cdot\frac{\pi^2}{4c^2}$$

$$= \frac{\beta^4\pi}{2c\beta\gamma}$$

$$b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} = -\frac{4A^4}{\alpha^2 4\frac{\beta^2\gamma}{\alpha^2}} = -\frac{A^4}{\beta^2\gamma}$$

$$= a\,p = a\,\frac{2\beta^2}{\alpha}$$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\frac{2\beta^2}{\alpha}}{1-\left(1+\frac{4\beta^2\gamma}{\alpha^2}\right)} = \frac{\alpha}{2\gamma}$$

także duża ε tylko od energji kinet. ale należy także od kierunku prędkości początk.

$$b^2 = \frac{c^2T^2}{a^2\pi^2}$$

$$\frac{c^2T^2}{a^2\pi^2} = a\,\frac{2\beta^2}{\alpha}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{2A^2\pi^2}{\alpha c^2} = \frac{2\pi^2}{\alpha c^2}\left(\beta + \frac{\alpha^2}{4\gamma\beta^2}\right) = 2\pi^2\left(\frac{\beta}{\alpha c^2} + \frac{\alpha}{4\gamma c^2\beta^2}\right)$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{2\beta^2\pi^2}{\alpha c^2}$$

$$= \frac{2\pi^2}{c^2}\,\frac{c^2}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}\,\frac{\left(1+\frac{m}{M}\right)^3}{2kM} = \frac{\pi^2}{k}\,\frac{1+\frac{m}{M}}{M}$$

Jeżeli więc masa m jest niezmiernie mała wobec M to będzie dokładnie ważne III prawo Keplera. Przy mniejszych planetach ☿ ♀ ♁ ♂ różnica jest nieznaczna, ale przy ♃ $\frac{m}{M} = \frac{1}{1000}$, podobnie przy ♄ etc. To jest wytłomaczeniem niedokładności dawniej wspomnianej w tem prawie.

Do zupełnie tych samych resultatów byśmy naturalnie doszli wychodząc z równań ruchu w układzie spółrzędnych prostokątnych, tylko że wtedy rachunek staje się daleko trudniejszym. Przypomnijmy atoli ażeby pokazać jak się otrzymuje nasze zasadnicze dwa równania energji i pól, bezpośrednio bez użycia powyżej wyprowadzonych trzech zasad.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{kMm}{r^2}\,\frac{x'-x}{r} \qquad M\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{kMm}{r^2}\,\frac{x-x'}{r}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{kMm}{r^2}\,\frac{y'-y}{r} \qquad M\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{kMm}{r^2}\,\frac{y-y'}{r}$$

67 Dodając:
$$M\frac{d^2x'}{dt^2} = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$M\frac{dx'}{dt} + m\frac{dx}{dt} = c = 0$$
$$Mx' + mx = c' = 0$$
i tak samo dla y = zasada środka mas

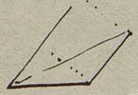
$$m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{k}{r^2}\frac{xy' - yx'}{r}$$
$$M\frac{d}{dt}\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \frac{k}{r^2}\frac{yx' - xy'}{r}$$
A zatem:
$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) + M(x'\dot{y}' - y'\dot{x}') = \text{stała}$$
= zasada pól

$$~~m\left(dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2}\right) + M\left(dx'\frac{d^2x'}{dt^2} + \right) = \frac{k}{r^2}\; x'dx - xdx + y'dy - ydy + xdx' - x'dx' + ydy' - y'dy'~~$$
$$~~= \frac{k}{R^2}\frac{d[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{R} = \frac{k}{R^2}\frac{dr^2}{R} = -2\frac{k}{R}~~$$

$$m\left(dx\frac{d^2x}{dt^2} + dy\frac{d^2y}{dt^2}\right) + M\left(dx'\frac{d^2x'}{dt^2} + \dots\right) = \frac{d}{dt}\left[2\frac{k}{r}\frac{Mm}{1+\frac{m}{M}}\right]$$
$$mv^2 + MV^2 =$$
$$MV^2 = \frac{m^2v^2}{M}$$
$$v^2\left(1+\frac{m}{M}\right)^2 = -2\frac{k}{r}M \quad = \text{zasada energii}$$

Znany jest problemat trzech ciał, dotychczas nie rozwiązany.
$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1m_2k\frac{x_2-x_1}{r_{12}^3} + m_1m_3k\frac{x_3-x_1}{r_{13}^3} \quad\Big\|\quad m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} =$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = \dots$$
$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = \dots \qquad \text{etc.}$$
9 równań różniczkowych drugiego rzędu; całki napewno znane są: 3 ruchu środka masy, 3 pól, 1 energii, więc pozostaje 11 całek nieznanych

$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = S\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB \cos(AB) = (\mathfrak{B}\mathfrak{A})$ komm.



$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}+C) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}C$

$= A\ \mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}+C)$ dutk.



mi na aspekt

równoległe $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB$

prostopadłe $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ warunek prostopadł.

$ii = jj = kk = 1$
$ij = 0 \ldots\ldots$ } ...

$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1B_1 + \ldots\ldots$

$\cos\varepsilon = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$ + itd. —

$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2 + 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos$

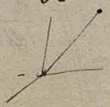
$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) =$ ~~$\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}$~~^{2}

$= \mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2$

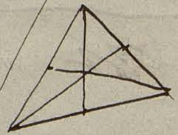
$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2+(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = 2\mathfrak{A}^2+2\mathfrak{B}^2$

$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^2-(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})^2 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$S\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \perp$ ~~$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$~~

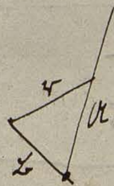


Praca



równanie prostej

$x = b_1 + a_1 p$



$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}p$

$\mathfrak{r} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}p$

płaszczyzna

$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q$

$\mathfrak{r} = C + \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q$

$x = c_1 + a_1 p + b_1 q$
$y = \ldots$
$z = \ldots$

$V\mathfrak{A}(\mathfrak{B}+C) = A\,V\mathfrak{A}_1(\mathfrak{B}+C)$



$ij = k$

$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

[illegible] , analyza do [illegible]

Pojęcie wektorów skalarów

3). $\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \cdot \mathfrak{a}_1$

2). mnożenie i dzielenie przez liczbę skalarną

$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ 1). znak równości

$\mathfrak{a} + A$ nie ma sensu!
$\mathfrak{a} = B$ "

4). $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ Definicja

Rzeczywistość prawo komut. $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}+\mathfrak{a}$

asocjat. $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c} = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$



(n wektorów tworzących zamknięty wielobok $\Sigma v = 0$

Znak $-$ $\mathfrak{a}$ $-\mathfrak{a}$

$\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$

Rozkładanie $v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$a_1 = |v| \cos(v, x)$

$a_2 =$

$a_3 =$

$|v| = \sqrt{a_1 + a_2 + a_3}$

($\frac{d}{dt}$ [illegible] tylko odejmowanie i dzielenie przez liczbę

$v = ix + jy + kz$

$\frac{dv}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$

Prędkość $\lim \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = v = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\, v_1$

Przyśpieszenie $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{ds}$

$= \frac{dv}{dt} v_1 + v\frac{dv_1}{dt}$

"

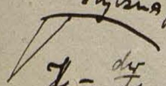
$\frac{dv_1}{ds}\frac{ds}{dt}$

" $v^2 \frac{d\mathfrak{T}}{ds}$ "

Równanie drogi $v = f_1(t)$

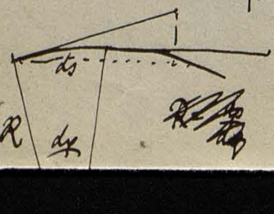
Równanie krzywej $v = f_2(s)$

Styczna jednostkowa



$\mathfrak{T}_1 = \frac{dv}{ds}$

$|d\mathfrak{T}_1| = d\varphi$



$|d\mathfrak{T}| : ds = 1 : R$

$|d\mathfrak{T}| = \frac{ds}{R}$

$\frac{d\mathfrak{T}_1}{ds} = \frac{1}{R}$

$\frac{d^2v}{dt^2} = 0$ Parabola

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} + M R^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$$

$$m r = R M$$

$$R = \frac{m r}{M}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt}\left(m + \frac{m^2}{M}\right) = \text{const} =$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{m\left(1+\frac{m}{M}\right)} = \mu \quad \| B$$

$$m\left[\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + M\left[\left(R\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] = \frac{m M k}{r+R} + \text{const}$$

$$\left[\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\left[m + \frac{m^2}{M}\right] = \frac{m M k}{r\left(1+\frac{m}{M}\right)} + \text{const}$$

$$\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{M k}{r\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} + \text{const} = \frac{1}{r}\alpha + \beta \quad \| \mu$$

$$\alpha = \frac{M k}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}$$

$$\beta = .$$

$$\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{2\mu^2} = z$$

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\beta}{\mu^2} + \alpha\frac{1}{\mu^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = d\varphi$$

$$\frac{-dz}{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\mu^2} + \frac{\alpha^2}{4\mu^4}\right) - z^2}} = d\varphi$$

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha}{2\mu^2} + \sqrt{\frac{\beta}{\mu^2} + \frac{\alpha^2}{4\mu^4}}\cos\varphi}$$

$$p = \frac{2\mu^2}{\alpha}$$

$$\varepsilon = \frac{2\mu^2}{\alpha}\sqrt{\frac{\beta}{\mu^2} + \frac{\alpha^2}{4\mu^4}}$$

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}$$

Ell.

$$\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}} \leqq 1$$

$$\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2} \leqq \frac{\alpha^2}{4\mu^2}$$

$$\beta \leqq 0$$

$$r^2 d\varphi$$

$$\varphi + B = \arccos\frac{u}{A}$$

$$u = -A\cos(\varphi$$

$$\frac{\alpha}{2\mu^2} - \frac{\mu}{r} = -\sqrt{\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}\cdot\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{\frac{\alpha}{2\mu^2} + \sqrt{}}$$

$$\frac{\alpha}{2\mu} + \sqrt{\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}\cos\varphi = \frac{\mu}{r}$$

$$r = \frac{\mu}{\frac{\alpha}{2\mu} + \sqrt{\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}\cos\varphi} = \frac{\frac{2\mu^2}{\alpha}}{1 + \frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{\beta + \frac{\alpha^2}{4\mu^2}}\cos\varphi}$$

$$p = \frac{2\mu^2}{\alpha}$$

$$T = \frac{2 a b \pi}{\mu}$$

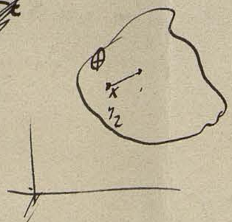
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 p \pi^2}{\mu^2} = 4\pi^2 \frac{2 c^2}{m^2\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} \frac{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}{M k}$$

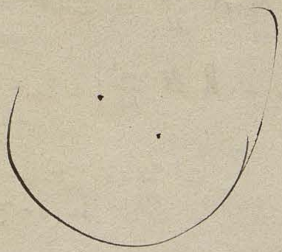
$$= \frac{4 \cdot 2 \frac{\mu^2}{\alpha}\pi^2}{\mu^2} = \frac{8\pi^2}{\alpha} = \frac{8\pi^2\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}{M k}$$

$$\frac{T^2}{r+R^3} = \frac{\alpha}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^3}.$$

$\xi_k = x_k - x_0$

$\eta_k = -$





~~$\xi = x - r\cos\varphi$~~

2 rot $\qquad \delta\alpha = \delta\beta = 0$

$\delta x_k = \delta x - y_k\,\delta\gamma$

$\delta y_k = \delta y + x_k\,\delta\gamma$

$\delta z_k = \delta z$

~~$y_k = y$~~

$x_k = x - r\cos\lambda$

$y_k = y - r\sin\lambda$

$\delta x_k - r\sin\lambda\,\delta\gamma = \delta x - (y_k - r\sin\lambda)\,\delta\gamma$

Jako przykład zastosowania tych praw można także uważać: zderzanie się ciał.

1). Najprostszy przypadek, jeżeli ruch tylko po pewnej prostej OX

$m_1\ m_2\ v_1\ v_2$ przed $\quad V_1\ V_2$ po zderzeniu



Z pierwszej zasady wypływa:

I). $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$

II). Już w niej zawarta, bo prędkość obszarowa, rachowana z jakiegoś dowolnego punktu będzie $(m_1 v_1 + m_2 v_2)a = (m_1 V_1 + m_2 V_2)a$

III). Jeżeli założymy że siły działające podczas zderzenia są zachowawcze wtedy musi energia kinetyczna ruchu pozostać niezmienną, to nastąpi więc jeżeli uderzenie będzie sprężyste (elastyczne). Wtedy:

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{V_1^2}{2} + m_2 \frac{V_2^2}{2}$$

Zapomocą tych dwuch równań można $V_1\ V_2$ wyrazić jako funkcyę z v_1 i v_2:

$$\left.\begin{aligned} m_1(v_1 - V_1) &= m_2(V_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - V_1^2) &= m_2(V_2^2 - v_2^2) \end{aligned}\right\} \quad v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \quad \Big|\begin{matrix} -1 \\ +m_2 \end{matrix}$$

$$(m_2 - m_1)v_1 + (m_2 + m_1)V_1 = 2m_2 v_2$$

A zatem: $V_1 = \dfrac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$

podobnie: $V_2 = \dfrac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$

69/ Uderzenia tego rodzaju nazywa się elastycznem n.p. dwie kule bilardowe.

Jest ono tylko wypadkiem idealnym bo w rzeczywistości zawsze pewna część energii zostaje stracona – albo właściwie zamieniona w ciepło — wypadek idealny drugiego rodzaju t.j. jeżeli jak najwięcej energia zostaje rozproszona nazywamy zderzeniem niesprężystem. Całkowita energia nie może być stracona bo musi być zachowany ruch środka masy.

Rozdzielimy więc ruch na ruch środka masy $V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ i ruchy odnośne do środka masy:

$$v_1' = v_1 - V = \frac{v_1 - v_2}{m_1 + m_2} m_2$$

$$v_2' = v_2 - V = \frac{v_2 - v_1}{m_1 + m_2} m_1$$

Łatwo teraz dowieść że całkowita energia kinetyczna: $\frac{m_1}{2} v_1^2 + m_2 \frac{v_2^2}{2}$ jest równa energii kinetycznej ruchu środka masy $\frac{m_1 + m_2}{2} V^2$ plus energii ruchów odnośnie do środka masy: $+ m_1 \frac{v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_2'^2}{2}$ ponieważ istotnie

$$(m_1 + m_2) \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_1 \frac{(v_1 - v_2)^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 (v_2 - v_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

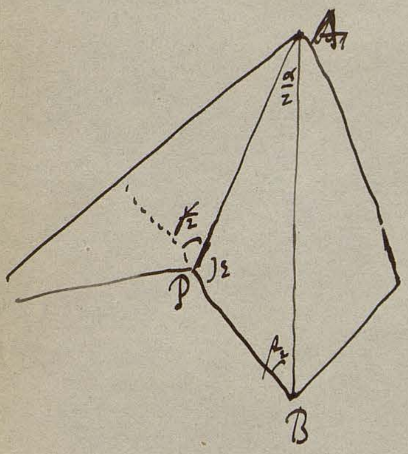
~~$\frac{m_1 m_2}{2} (m_2 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_1 v_1^2 + m_1 v_2^2)$~~

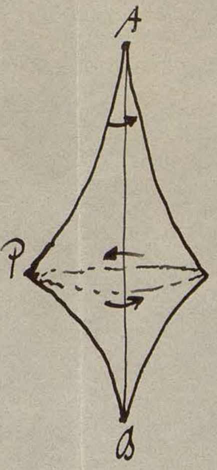
~~$2 m_1 m_2 (m_2 v_1 v_2 + m_1 v_1 v_2)$~~

$$= \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Patrząc z góry







$$\cos \varepsilon = -\cos \tfrac{\alpha}{2} \cos \tfrac{\beta}{2} + \sin \tfrac{\alpha}{2} \sin \tfrac{\beta}{2} \cos AB$$

$$\cos \tfrac{\gamma}{2} = \cos \tfrac{\alpha}{2} \cos \tfrac{\beta}{2} - \sin \tfrac{\alpha}{2} \sin \tfrac{\beta}{2} \cos AB$$

Więc najmniejsza energia możliwa będzie jeśli ruch odnośnie do środka masy będzie zero, a zatem jeśli $V_1 = V_2 = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

To jest więc prawo uderzenia niesprężystego (kule z gliny miękkiej).

Te prawa wyprowadziliśmy z całek ogólnych ruchu, można by naturalnie tak samo i z badania bezpośredniego sił działających przy zderzeniu.

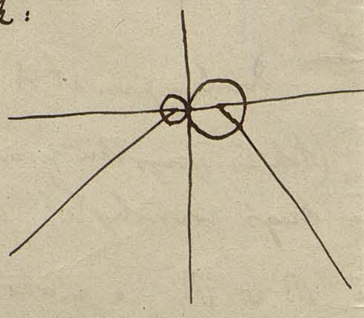
Jeśli ruchy nie są ograniczone do prostej: zderzenie ukośne:

Rozróżnić należy zderzenie centryczne środkowe

excentryczne ~~odśrodkowe~~ ukośne

Pierwsze jeśli siły wywołane idą przez resp. środki mas, zatem ciała nie nabiorą żadnego ruchu wirującego wskutek ich. N. p. kule jednorodne zawsze zderzają się środkowo. Wtedy te same prawa można zastosować w dwóch rozmiarach.

Albo także tak:



Wtedy cały ruch większy można na składowe wzdłuż i prostopadłe do łącznicy środków (Centrallinie) (Stossrichtung)

pierwsze zostają niezmienione, drugie według praw przedtem poznanych.

Przy zderzeniu excentrycznem należy zważać że nastąpi ruch wirujący więc trzeba dodać w drugim równaniu momenta prędkości obrotowej z tego pochodzącej.

Przechodzimy do mechaniki właściwych ciał sztywnych

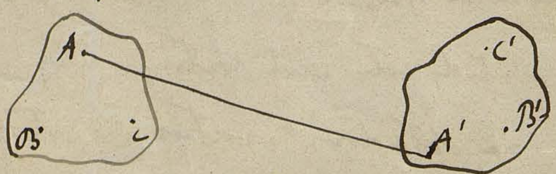
Tak nazywamy ciała stałe, jeżeli sprężystość ich tak wielka, że można zaniedbać małe zmiany kształtu zachodzące wskutek sił, więc jeżeli odkształcenia są małe. Można uważać te ciała jako złożone z nieskończonej ilości punktów i wtedy można zastosować te same równania, które poznaliśmy jako ważne dla układów punktów.

$\delta x\ \delta y\ \delta z$ wtedy są wszystkie ze sobą w pewnym niezmiennym połączeniu. Musimy najprzód poznać ile z tych przesunięć można uważać jako niezależnie zmienne, i jak inne od nich zależą t. j. musimy się zapoznać z kinematyką ciał sztywnych.

I. Pozycja ciała oznaczona przez pozycję trzech punktów { dziewięć spółrzędnych ale przy tem 3 odległości niezmienne, więc właściwie tylko 6 dowolnych stopni swobody.

I. Ciało można wprowadzić w jakąś bądź dowolną pozycję zapomocą jednego przesunięcia punktu dowolnego i dwuch obrotów, ~~z których~~ odnoszących się do punktów dowolnych.

Dowolny punkt A przez przesunięcie (tak że wszystkie punkty opisują drogi równoległe) w punkt A'

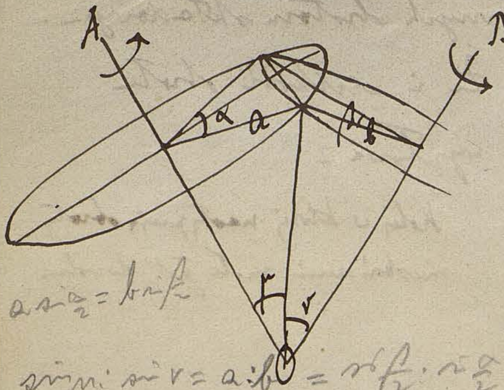


potem obrót koło jakiejś osi tak że B w B', a nakoniec C w C' wtedy i wszystkie inne punkty znajdują się w przynależnych pozycjach.

II. (Jeżeli wykona się) Dwa dowolne obroty koło osi przechodzących przez pewien punkt można ~~złożyć w jednym obrotem koło~~ osi zawsze znaleźć punkty (leżące na pewnej osi) które pozostały mimo to nieruchome

Obroty α koło osi A i β koło osi B

~~$a \sin\frac{\alpha}{2} = b \sin\frac{\beta}{2}$~~ $a : b = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2}$



$a \sin\frac{\alpha}{2} = b \sin\frac{\beta}{2}$

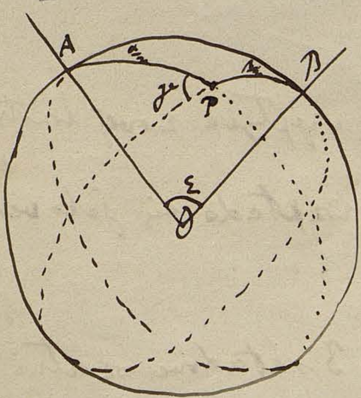
$\sin\mu : \sin\nu = a : b = \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}$

Wykreślimy największe koła pod kątami $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ od ~~[illegible]~~ południka

Wtedy punkt P pozostaje w swej pozycyi

Wszystkie inne punkta zaś zmieniają swe położenie

N. p. punkt A wskutek obrotu koło B



III ~~Zatem~~ Można zastąpić owe dwa obroty jednym obrotem koło osi OP wielkości γ (obrót wypadkowy)

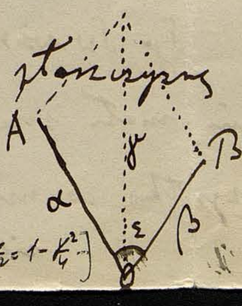
$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\varepsilon$

Położenie osi zależy jednak od tego w jakim porządku te obroty następują; gdyby najprzód B(β) potem A(α), wtedy ~~oś~~ oś OP musiałaby leżeć z przeciwnej strony.

IV. Zatem można sprowadzić ciało w dowolną pozycyę za pomocą jednego przesunięcia punktu dowolnego i jednego obrotu koło tego punktu. t. j. przez skręt (śrubowy).

V. Jeżeli obroty są nieskończenie małe, wtedy $a : b = \alpha : \beta$ $a = r\sin\mu$ $b = r\sin\nu$ i punkty P i B' wpadają w płaszczyznę AOB, zatem i $\sin\mu : \sin\nu = \alpha : \beta$

Zatem konstrukcya:
bo kierunek temu odpowiada
a tak samo i wielkość (wstawiając $\cos\frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\gamma^2}{4}$ ...)



Znów kierunek osi wypadkowej oznaczony przez przekątną z

równoległoboku wykreślonego na odcinkach równych obrotom składowym i położonych w kierunku ich osi. ~~Skąd~~ Że i wielkość obrotu wypadkowego odpowiada obrotom składowym wypływa z

$\cos\frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\gamma^2}{8} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{8}$ etc.

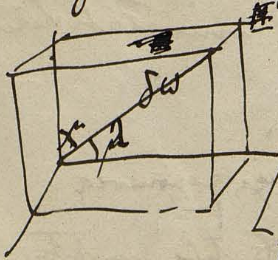
Kolej w której następują obroty nieskończenie małe jest dowolna

$$1 - \frac{\gamma^2}{8} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{8}\right) - \frac{\alpha}{2}\frac{\beta}{2}\cos\varepsilon$$

$$= 1 - \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\beta^2}{8} - \frac{\alpha\beta}{4}\cos\varepsilon$$

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\varepsilon$ co właśnie wypływa z owej konstrukcji geometrycznej. Zatem obroty nieskończenie małe składa i rozkłada się jako wektory, przez dodawanie geometryczne.

VI Zatem każdy obrót nieskończenie mały rozłożyć można na 3 składowe wzdłuż osi XYZ według konstrukcji ~~równoległoboku~~ równoległościanu.



$$\delta\omega \begin{cases} \delta\alpha = \delta\omega \cos\lambda \\ \delta\beta = \delta\omega \cos\mu \\ \delta\gamma = \delta\omega \cos\nu \end{cases}$$

[Łatwo to także bezpośrednio poznać. N.p. punkt M wskutek wypadkowego obrotu $\delta\omega$ tylko przesunie się w płaszczyźnie XY o długość $\delta\omega \cdot \delta\omega \cos\nu \sin\nu$ w tył. Wskutek $\delta\alpha$ przychodzi do góry o $\delta\alpha\, \delta\omega \cos\mu$ ~~na dół~~ o $\delta\beta\, \delta\omega \cos\lambda = 0$. W płaszczyźnie obrotu tylko $\delta\gamma$: $\delta\gamma\, \delta\omega \sin\nu = \delta\omega^2 \cos\nu \sin\nu$ więc to samo jak to]

Również dla innych punktów

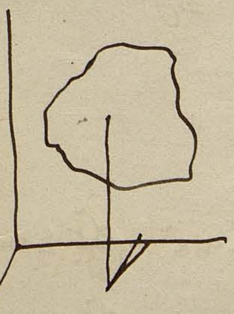
Dzieląc te ~~przez~~ obroty nieskończenie małe przez czas odpowiedni otrzymujemy prędkości kątowe, więc wszystko co mówiliśmy co do nich odnosi się również i do prędkości obrotowych.

VII Zatem ~~każdy~~ każdy ruch ciała sztywnego można przedstawić sobie jako złożony z prędkości translacyjnej (postępowej) (przenośnej), (którą można znów rozłożyć na 3 składowe) i z ~~obrotu~~ prędkości obrotowej ~~koło osi~~ (znów składającej się z 3 składowych). Naturalnie zwykle zmienia będzie i kierunek i wielkość tych prędkości, ale przecież w każdym momencie ruch będzie tego ~~rod~~ rodzaju jak śruby w mutrze t. j. skrętem chwilowym (tylko że oś obrotu nie będzie miała tego samego kierunku jak prędkość przenośna).

VIII Co do sensu w którem ruch się odbywa trzymamy się dawniej wzmiankowanych postanowień. + w kierunku trybuszonu

~~Jeżeli punkt~~

IX Weźmy ogólny przypadek przesunięcia:



$$\delta x \quad \delta y \quad \delta z, \quad \delta\alpha \quad \delta\beta \quad \delta\gamma$$

$$\begin{cases} \delta x + z_k\delta\beta - y_k\delta\gamma = \delta x_k \\ \delta y + x_k\delta\gamma - z_k\delta\alpha = \delta y_k \\ \delta z + y_k\delta\alpha - x_k\delta\beta = \delta z_k \end{cases}$$

X Jeżeli punkt przez którego położenie oś obrotu nie wybieramy dowolnie lecz stósownie do warunków zadania to można obrać kierunek przesunięcia równy kierunkowi osi (Z = oś skrętu)

$$\delta x_k = \delta x - y_k\delta\gamma$$
$$\delta y_k = \delta y + x_k\delta\gamma$$
$$\delta z_k = \delta z$$

Obierając stósowne y_k, x_k t. j. stósowny początek spółrzędnych można zrobić: $\delta x = \delta y = 0$; zatem postępowy ruch śrubowy

Mówimy także tak: ciało sztywne ma 6 stopni wolności

Tyle co do kinematyki ciał sztywnych. Teraz ~~dynamika~~ kinetyka:

I Równowaga: $\Sigma(X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0$

$$\delta x\,\Sigma X_k + \delta y\,\Sigma Y_k + \delta z\,\Sigma Z_k + \delta\alpha\,\Sigma(y_k Z_k - z_k Y_k) + \delta\beta\,\Sigma(z_k X_k - x_k Z_k) + \delta\gamma\,\Sigma(x_k Y_k - y_k X_k) = 0$$

Przesunięcia jest całkiem dowolne, więc równowaga może tylko istnieć jeżeli pojedyncze

75 $\sum X_k = 0 \quad \sum Y_k = 0 \quad \sum Z_k = 0$

$$\sum (y_k Z - z Y) = 0 \quad \sum (z X - x Z) = 0 \quad \sum (x Y - y X) = 0$$

Więc nie wystarczy żeby sumy sił były $= 0$, lecz i całkowite momenty sił muszą być $= 0$. Zresztą przejdziemy zaraz do kinetyki jako ogólniejszego działu:

$$\sum \left(m_k \frac{d^2 x}{dt^2} - X\right) \delta x \ldots = 0$$

~~Teraz wyrazimy możliwie:~~ $\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} + z_k \frac{d^2 \beta}{dt^2} - y_k \frac{d^2 \gamma}{dt^2}$

$$\left(\sum X_k - \frac{d^2 x}{dt^2} \sum m_k - \frac{d^2 \beta}{dt^2} \sum m_k z_k - \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \sum m_k y_k\right) \delta x +$$

$$+ \left[\sum (z_k X_k - x_k Z_k) - \frac{d^2 x}{dt^2} \sum m_k z_k + \frac{d^2 z}{dt^2} \sum m_k x_k - \frac{d^2 \beta}{dt^2} \left(\sum m_k z_k^2 + \sum m_k x_k^2\right)\right.$$

$$\left. + \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \sum m_k y_k z_k - \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \sum m_k x_k y_k \right] \delta \beta + \ldots \ldots = 0$$

Zatem:

$$\sum X_k = \frac{d^2 x}{dt^2} \sum m_k - \frac{d^2 \beta}{dt^2} \sum m z - \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \sum m y$$

$$\sum (z X - x Z) = \frac{d^2 x}{dt^2} \sum m z - \frac{d^2 z}{dt^2} \sum m x - \frac{d^2 \beta}{dt^2} \left(\sum m z^2 + \sum m x^2\right) - \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \sum m y z + \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \sum m x y = 0$$

(i 4 inne które otrzymamy przez przemianę $x\, y\, z$)

Te równania bardzo skomplikowane znacznie się uproszczą jeżeli jako punkt którego przesunięcia znaczymy przez $\delta \xi\, \delta \eta\, \delta \zeta$ i przez który kładziemy oś obrotu $\delta \alpha\, \delta \beta\, \delta \gamma$ obierzemy środek mas, więc jeżeli wprowadzimy współrzędne punktów ciała odnośnie do środka mas:

Otrzymamy więc jako równania ruchu:

$$\sum m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} = \sum X_k$$

. . . .

$$\sum m_k\left(x_k \frac{d^2y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2x_k}{dt^2}\right) = \sum(x_k Y_k - y_k X_k)$$

. . . .

Te same jak przy układzie punktów ale tam to były tylko pojedyncze z całości tutaj już cały ruch przez nie jest określony

Główne nasze późniejsze zadanie będzie polegało na przekształcaniu lewej strony tych równań. Tymczasem będziemy się zajmowali najprzód prawą stroną.

Widzimy więc że co do sił, ich działalność (przy równowadze i przy ruchu) zależy tylko od wartości tych sześciu wyrazów, które już dawniej poznaliśmy jako składowe siły całkowitej i składowe momentu całkowitego.

Jeśli więc dwa układy sił pod tym względem są równe, to one równe działanie wywierają. Nazwiemy je $\sum X_k = X \quad Y, \quad Z$

$$\sum(xY - yX) = R, \quad P, \quad Q$$

że XYZ można uważać jako składowe siły $F = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ wiemy już dawno

$X = F\cos\alpha$ etc.

Również wspomnieliśmy tosamo co do $P\ Q\ R$: $S = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}$ że możemy je uważać jako przekątnię z początkiem .....

$r\{\lambda\mu\nu \quad F\{\alpha\beta\gamma$

N. p. $R = xY - yX = rF(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha)$

~~Z odpowiedzi~~ Jakie to S ma znaczenie?

$$S = rF\sqrt{(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha)^2 + (\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta)^2 + (\quad)^2}$$

$$= rF\sin(\chi rF)$$

S nazywamy momentem siły względem tego punktu (r), jest on równy

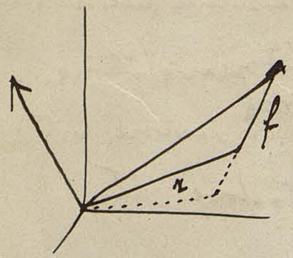
iloczynowi z $\quad r$ i $f\sin(rf)$ odległości r i składowej siły prostopadłej do niej

albo $\quad f$ i $r\sin(rf)$ siły i odległości najkrótszej z początku współrzędnych do kierunku siły

Kierunek S: $\frac{\mathfrak{P}}{S} = \frac{\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda\cos\gamma}{\sin(rf)} = \cos(S\mathfrak{P})$

to znaczy że $S \perp rf$

(łatwo dowieść że $\cos rS = \cos(SX)\cos\lambda + \cos(SY)\cos\mu + \cos(SZ)\cos\nu = 0$
i $\cos fS = \cos(SX)\cos\alpha + \dots = 0$)



miarą momentu jest obszar ~~całe~~ trójkąta (fr)
a kierunek $\perp$

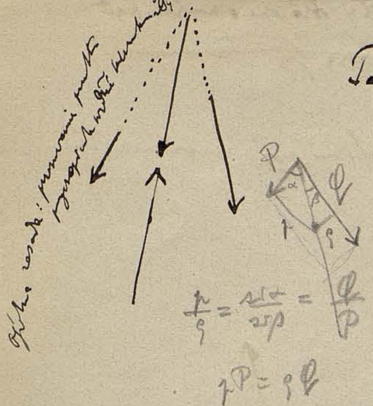
Z tej definicji jak również z owych wyrazów $XYZ\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ wynika że działanie pozostaje niezmienione jeżeli siły przesunie się w ich własnym kierunku t.j. jeżeli punkt przyczepienia siły przesunie się w kierunku tejże. Momenty sił są równe jeżeli kierunek równy i obszar równy.

Do równowagi nie wystarczy żeby wypadkowe całkowite $= 0$ ale także moment $= 0$

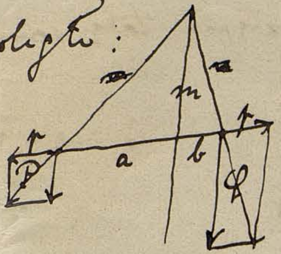
Te zasady można równie dobrze i w syntetyczny sposób wywieść t.j. za pomocą tak zw. par sił (dwójek sił Fabian)

Parę sił nazywamy dwie siły równoległe ale w przeciwnych kierunkach jeżeli punkty przyczepienia nie leżą w ich kierunku

Jeżeli do jednego punktu różne siły przyczepione to zawsze można je równoważyć przez jedną siłę (przeciwną wypadkowej) przyczepioną do tego samego punktu.
Także i jeżeli do różnych punktów przyczepione to można znaleźć pewien punkt w którym ~~ta~~ przyczepiając pewną siłę można stworzyć równowagę.
— Ale tylko jak długo wszystko w jednej płaszczyźnie! —



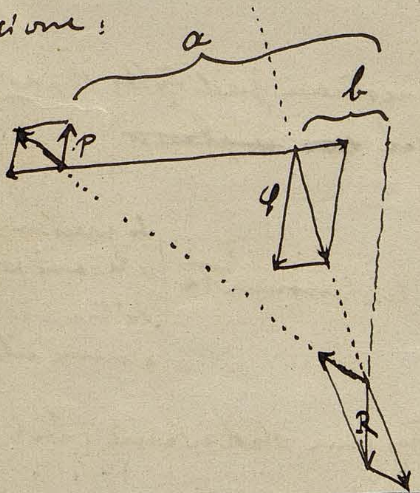
Także jeżeli równolegle:



~~a : m = p : P~~
~~b : m = p : Φ~~

$a : m = p : P$
$b : m = p : \Phi$
$a : b = \Phi : P$

To samo jeżeli kierunki przecięte:



Wtedy tak samo równanie ↑

ale jeżeli $\Phi = -P$ wtedy nie można znaleźć takiego punktu; musiałby on leżeć w ∞.

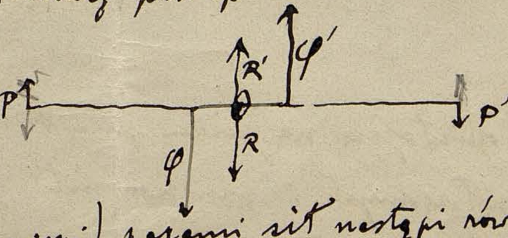
Więc działania pary sił nie można przewidzieć za pomocą przyczepienia jednej siły.

$R' + P = \Phi$
$\alpha : \beta = R : P$
$\alpha + \beta : \beta = R + P : P = \Phi : P$

~~Działalność~~ Parę sił można zastąpić inną o tem samem ramieniu ~~jeżeli~~ ~~ze~~ siłami równemi składowej prostop. do ramienia.

$O\Phi : OP = P : \Phi$





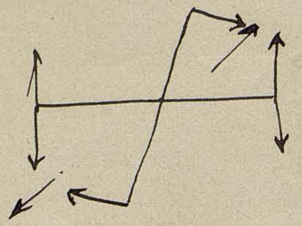
Między dwoma takiemi (al przeciwnemi) parami sił nastąpi równowaga jeżeli iloczyny z ramienia i składowej prostopadłej są te same ↑

P i Φ razem $= R$
P' Φ' $= R' = -R$

zatem } = 0

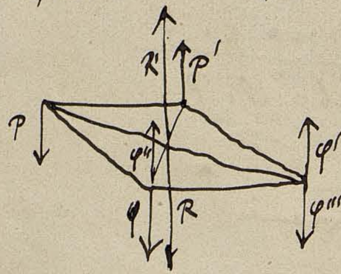
zatem ten iloczyn stanowi miarę działalności pary sił; jest to właśnie owym momentem sił.

79 Parę sił można zastąpić taką samą jeśli ramię i siły obrócone o pewien kąt ~~płaszczyzna ich ta sama~~



(Co zresztą wynika już z definicji momentu)

Parę sił można przesunąć w płaszczyźnie



$$\left.\begin{array}{l} P\varphi''' = R \\ P'\varphi'' = R' = -R \end{array}\right\} = 0$$



zostaje $\varphi\ \varphi'$

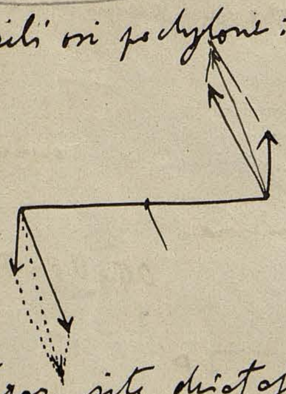
Tak samo i w przestrzeni jeśli tylko oś pozostała ||

Zatem można je dowolnie obracać i przesuwać ~~...~~ ~~w płasz...~~

tylko oś musi zostać równoległa.

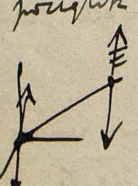
Pary sił z równą osią dodają się, dodawając ich momenta. | bo przesunięcie w tę samą pozycję da to same ramię a sumę sił.

Jeśli osie pochylone:



Zatem przez geometryczne dodawanie (lub zapomocą ~~...~~ równoległościanu).

Teraz siłę działającą na pewien punkt można zastąpić przez siłę działającą na początek współrzędnych i przez parę sił



Tak można postąpić z każdą siłą; to potem złożyć w całkowitą siłę wypadkową i parę sił wypadkową.

Więc tylko od ich wartości zależy działanie sił, co jest ten sam rezultat jak przedtem

~~Tyle co do działania sił. Teraz co do układu mas:~~

~~Uproszczenie znaczne wprowadzając współrzędne środka~~

~~W jakim wypadku~~ Czy można zastąpić dowolną wypadkową i parę wypadkową przez jedną siłę przyczepioną do punktu stosownie obranego?

Albo co jest to samo: czy można je równoważyć przez jedną siłę?

$$0 = X + \Xi \qquad 0 = \mathfrak{P} + (y F\cos\gamma - z F\cos\beta)$$

$$0 = Y + H \qquad 0 = \mathfrak{Q} + (z F\cos\alpha - x F\cos\gamma)$$

$$0 = Z + Z \qquad 0 = \mathfrak{R} + (x F\cos\beta - y F\cos\alpha)$$

Zdaje się więc jak gdybyśmy mieli 6 równań dla 6 niewiadomych (~~[illegible]~~)

Ale nie jest tak w rzeczywistości, bo nie są one niezależne: Więc n.p. wyrugować z IV i V otrzymamy zaraz że VI nie równanie dla x i y lecz: $\mathfrak{P}X + \mathfrak{Q}Y + \mathfrak{R}Z = 0$

Tylko pod tym warunkiem więc można rozwiązać to zadanie.

Co on znaczy? $X = F\cos\alpha \ldots$ $P = \Pi\cos\lambda \ldots$

więc $(\cos\alpha\cos\lambda + \ldots) = 0$ więc $(\measuredangle F\Pi) = 90^\circ$

to znaczy że siła wypadkowa musi leżeć w płaszczyźnie momentu wypadkowego, inaczej nie można wcale zastąpić tego układu jedną jedyną siłą.

Wróćmy teraz do naszych równań i zajmujmy się ich lewemi stronami: Znaczne uproszczenie przez wprowadzenie współrzędnych środka ~~mas~~ bezwładności.

$$x_k = \xi + x_n \qquad y_k = \eta + y_n \qquad z_k = \zeta + z_n$$

81) ~~$\sum m x_k$~~ Zamiast k użyjemy dla symetryi także przy m znaczek n

$$\sum m_n x_n = \sum m_n y_n = \sum m_n z_n = 0 \qquad \sum m_n = M$$

Również $\sum m_n \frac{dx_n}{dt}$ i $\sum m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} = 0$ etc. Otrzymamy więc:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = X$$

$$M\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y$$

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z$$

~~$\eta \sum m_n \frac{d^2\zeta}{dt^2}$~~

$$\sum m_n\left[(\eta + y_n)\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2 z_n}{dt^2}\right) - \dots\right] = \dots \sum\left[(y_n + \eta) Z_n - \dots\right]$$

$$\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\sum m_n + \eta\sum m_n\frac{d^2 z_n}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\sum m_n y_n + \sum m_n y_n \frac{d^2 z_n}{dt^2} -$$

Zatem:

$$\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)M + \sum m_n\left(y_n\frac{d^2 z_n}{dt^2} - z_n\frac{d^2 y_n}{dt^2}\right) =$$

$$= \eta Z - \zeta Y + \sum(y_n Z_n - z_n Y_n)$$

Zatem:

$$\sum m\left(y_n\frac{d^2 z_n}{dt^2} - z_n\frac{d^2 y_n}{dt^2}\right) = P$$

$$\sum m\left(z_n\frac{d^2 x_n}{dt^2} - x_n\frac{d^2 z_n}{dt^2}\right) = Q$$

$$\sum m\left(\qquad\qquad\right) = R$$

To są równania zupełnie analogiczne do poprzednich tylko że zamiast spółrzędnych x_k y_k mamy x_n

W pierwszych tylko $\xi\eta\zeta$, tutaj tylko $x_n\, y_n\, z_n$, zatem niezależne od siebie

To znaczy więc że ruch ~~str~~ powstający wskutek momentów sił (t. j. obrotowy) odbędzie się w zupełnie ten sam sposób jak jeżeli środek bezwładności jest ustalony i znów te same siły przyczepione jak przedtem. A znów z górnych równań wynika że ruch środka bezwładności ~~tak się~~ odbywa się bez względu na ruch obrotowy tak jak gdyby w nim były połączone wszystkie masy i siły. Więc te dwa rodzaje ruchu zupełnie są od siebie niezależne. Ten ostatni

odbywa się według tych samych praw jak ruch punktu materyalnego o masie $M = \Sigma m_k$, więc według prawideł nam już znanych, więc będziemy się nadal zajmowali tylko drugim rodzajem.

Ale najpierw musimy jeszcze rozważyć w jaki sposób znajduje się współrzędne środka masy.

$$\xi = \frac{\Sigma m_k x_k}{\Sigma m_k} \qquad \eta = \cdot\cdot \qquad m_k = \rho\, dv$$

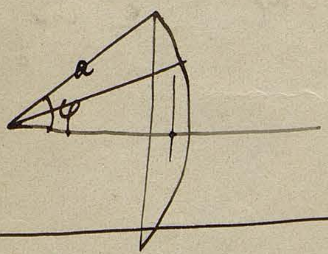
$$\xi = \frac{\int \rho x\, dv}{\int \rho\, dv} \qquad \eta = \frac{\int \rho y\, dv}{\int \rho\, dv} \qquad \zeta =$$

Zwykle przyjmujemy gęstość ρ jako ~~tę samą we wszystkich~~ stałą (ciała jednorodne) homogen

Wtedy $\xi = \frac{\int x\, dv}{\int dv}$ etc.

Ciała linearne: $dv = q\, ds$ q = przecięcie stałe zatem $\xi = \frac{\int x\, ds}{\int ds}$

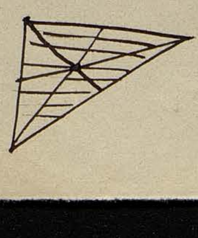
Linia prosta w środku. Łuk koła.



$$\xi = \frac{2\int_0^{\varphi} a\, d\varphi \cdot a \cos\varphi}{2a\varphi} = a \frac{\sin\varphi \Big|_0^{\varphi}}{\varphi} = \frac{a \sin\varphi}{\varphi}$$

N. p. $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\xi = \frac{2a}{\pi}$

Ciała płaskie: $dv = \delta\, df$ $\qquad \xi = \frac{\iint x\, df}{\iint df}$



Wycinek z koła: $\xi = \frac{2}{a^2\varphi} \int_0^{\varphi}\int_0^{a} r^2\, d\varphi\, dr \cos\varphi$.

$$= \frac{2 \sin\varphi}{a^2 \varphi} \int_0^a r^2\, dr = \frac{2a \sin\varphi}{3\varphi}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\xi = \frac{4a}{3\pi}$

Wycinek koła

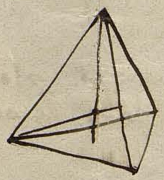
$$\xi = \frac{\int_{a\cos\varphi}^{a} y\,x\,dx}{\int_{x=a\cos\varphi}^{a} y\,dx} = \frac{\int_{a\cos\varphi}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\;x\,dx}{\int_{a\cos\varphi}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx} = \frac{-\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_{a\cos\varphi}^{a}}{\int \dots} =$$

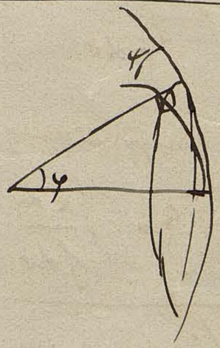
$$= \frac{1}{3}\,\frac{a^3\sin^3\varphi}{\frac{a^2}{2}\varphi - a^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}} = \frac{2}{3}\,\frac{a\sin^3\varphi}{\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\xi = \frac{2}{3}\,\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\xi = \frac{\iiint x\,dv}{\iiint dv}$$





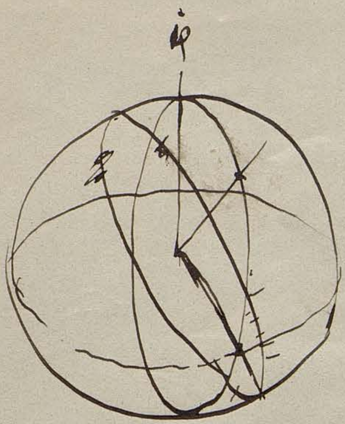
Wycinek kuli:

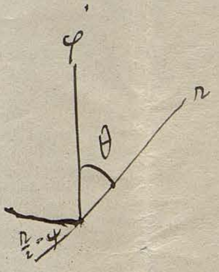
$$dv = r^2\sin\varphi\; d\varphi\, dr\, d\psi$$

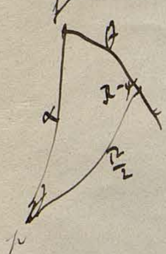
$$\frac{\iiint r^3\sin\varphi\cos\varphi\; d\varphi\, d\psi\, dr}{\iiint r^2\sin\varphi\, d\varphi\, dr\, d\psi} = \frac{\iint r^3 dr\,\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\iint r^2 dr\,\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{\frac{a^4}{4}\,\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\varphi}}{-\frac{a^3}{3}\cos\varphi\Big|_0^{\varphi}}$$

$$\xi = \frac{3a}{8}\,\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $= 3a$

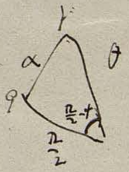


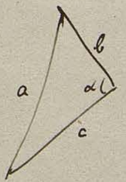




$$\cos\alpha = \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} + \sin\theta \sin\frac{\pi}{2} \cos(\pi-\varphi)$$

$$= -\sin\theta \cos\varphi$$





$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos\alpha$$

$$1-\frac{a^2}{2} = 1-\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{2} + a\, b \cos\alpha$$

$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cos\alpha$$

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mlg\varphi$$

$$\frac{K}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Mgl\cos\varphi = Mgl\cos\varphi_0$$

$$\frac{K}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mgl(\cos\varphi_0-\cos\varphi)$$

$$= Mgl\,\frac{\varphi^2-\varphi_0^2}{2}$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{K}{Mgl}}\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-\varphi_0^2}}$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{K}{2Mgl(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}}$$

$$\frac{d^2t}{d\varphi^2} = \sin\varphi(\cos\varphi_0-\cos\varphi)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3t}{d\varphi^3} = \cos\varphi(\cos\varphi_0-\cos\varphi)^{-3/2} + \sin^2$$

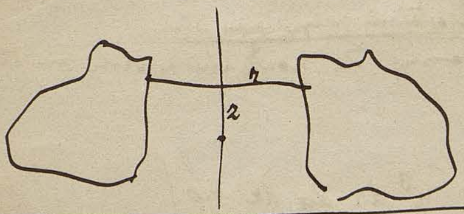
$$\varphi = \varphi_0 + t\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 + \cdots \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{t^2}{2}\frac{Mgl}{K}\varphi_0$$

$$1+\delta = 1 + \frac{t^2}{2}\frac{Mgl}{K}$$

$$t = \sqrt{\frac{K}{Mgl}}\sqrt{2\delta}$$

Przy tej sposobności można przytoczyć dwie zasady Guldina, odnoszące się do ciał obrotowych:



$$O = \int 2\pi r\, ds = 2\pi \frac{\int r\,ds}{\int ds}\int ds = 2\pi R_s S$$

$$V = 2\pi \iint r\,dr\,dz = 2\pi \frac{\int r\,df}{\int df}\int df = 2\pi R_0 O$$

Wróćmy teraz do ruchu obrotowego, który się więc tak będzie odbywał jakgdyby środek bezwładności był utwierdzony. Wtedy mamy jeszcze niezależnie zmienne 3 obrotowe prędkości zatem 3 stopnie wolności.

Najprzód zupełnie specyalny przykład, abyśmy się zaznajomili z pojęciami momentów.

Niech ciało będzie utwierdzone w dwóch punktach np. tak że z niem jest połączona oś, obracająca się w dwóch (łożyskach) nasadach. Wtedy więc tylko jeden stopień wolności. Obierzemy oś jako Z, więc XY jako płaszczyznę obrotu. Wtedy owa oś będzie wywierała takie momenta przymusowe P' i Q' że

$P + P' = 0$; $Q + Q' = 0$, R zostanie niezmienione.

Zatem: $\frac{d}{dt} \sum m\left(x_n \frac{dy_n}{dt} - y_n \frac{dx_n}{dt}\right) = R$

Wprowadźmy układ biegunowy: $x_n = r_n \cos\varphi_n$ $y = r \sin\varphi$

$$\frac{d}{dt} \sum m_n r_n^2 \frac{d\varphi_n}{dt} = R$$

$\varphi_n = \varphi + \psi_n$

$\frac{d\psi_n}{dt} = 0$



obieramy jakiś stały kierunek w ciele samym od którego się zaczyna

Zatem:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_n r_n^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = R = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \underbrace{\sum m_n r_n^2}$$

(względności Z)

To nazywamy momentem bezwładności K

$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R$ Więc równanie zupełnie analogiczne [podobne] do zasady ruchu

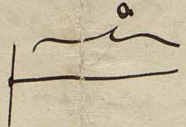
Newtona: $M\frac{d^2\xi}{dt^2} = X$ ‖ Z tego już ogólne wyobrażenie o znaczeniu wielkości K: jeśli mała K to przez moment R szybki obrót w krótkim czasie. Jeśli R stałe to ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony.

K jest wielkością bardzo ważną. Zamiast gdzie mamy Σ nad wierzch. wiele punktów tylko to całka; $m_n = \rho\, dv$

$$K = \rho\int r^2 dv = \rho\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \rho\int r^3\,dr\,d\varphi\,dz = \rho\int$$

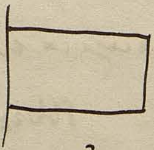
Przykłady:

Prosta linia: $dv = q\,dx$

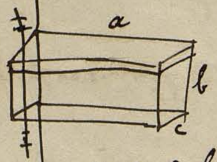


$$K = \rho q\int_0^a x^2 dx = \rho q\frac{a^3}{3}$$ więc tak jak gdyby cała masa była skoncentrowana w punkcie $\frac{a}{\sqrt{3}}$

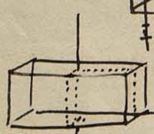
Tak samo naturalnie płyta prostokątna



to można rozłożyć w paski ≡



$$K = \delta\rho\iint (x^2+z^2)\,dx\,dz = \delta\rho\left(\frac{a^3}{3}c + \frac{ac^3}{3}\right) = \frac{M(a^2+c^2)}{3}$$



$$K = \frac{4}{3}\frac{a}{2}b\frac{c}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}\right) = \frac{abc}{12}(a^2+c^2) = \frac{M(a^2+c^2)}{12}$$

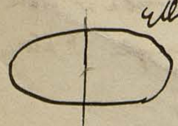
Krążek



$$K = \iint r^3\,dr\,d\varphi = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{2}$$

$$\Sigma m x^2 = \Sigma m y^2 = \frac{1}{2}\Sigma m(x^2+y^2) = \frac{Mr^2}{4}$$

$$K = 2\iint r^3\cos^2\varphi\,d\varphi\,dr = 2\frac{r^4}{4}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4}$$



Elipsoid: $K = \rho\iiint (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$

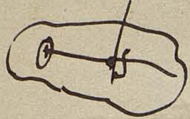
$$= 2\rho\int_0^a dx\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dz\,(x^2+z^2)\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} dy = 2\rho\int_0^a dx\int_0^c y\,dz\,.\,x^2 + \int_0^c dz\int_0^? y\,dx\,.\,z^2$$

$$= 2\rho\pi\int_0^a dx\,.\,x^2\,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \dots = 2\rho\pi\,bc\int x^2 - \frac{x^4}{a^2}$$

$$= 2\rho\pi\,bc\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right) + \dots = \frac{4\pi\rho}{15}bc\,(a^3 + c^2 a) = \frac{4\pi\rho abc}{3}\,\frac{a^2+c^2}{5} = M\frac{a^2+c^2}{5}$$

Dla kuli: $K = \frac{2Ma^2}{5}$

Moment bezwładności dla osi równoległych:



Dajmy na to że ~~zwolaliśmy~~ znamy K ($=K_0$) względem osi przechodzącej przez środek masy S, a szukamy K względem innej osi równoległej w odległości ξ a

$$\int x\,dx\,dy\,dz = 0 = \int y\,dx\,dy\,dz$$

$$K_0 = \int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$K = \int\left[(a+x)^2+y^2\right]dx\,dy\,dz = a^2\int dx\,dy\,dz + \underbrace{2a\int x\,dx\,dy\,dz}_{=0} + \int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

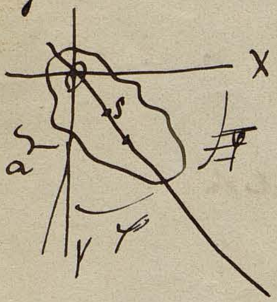
$$= a^2 M + K_0$$

N.p.  $K = \frac{Mr^2}{4} + \frac{Ml^2}{3}$

Więc najmniejsze wartości K dla osi przez środek masy

Zatem promień bezwładności: $R = \sqrt{a^2 + R_0^2}$

Przykład: Wahadło fizyczne



Jako linię odniesienia obieramy promień z O do S

Moment siły $R = \sum (x_n Y_n - y X)$

Co do sił równoległych, proporcjonalnych do mas:

$Y_n = \rho Y_0\, dv_n = Y_0 m_n$ $\quad Y = \sum Y_n = Y_0 M$

$$R = \rho\left(Y_0 \int x_n\, dv\right) = \rho\left(Y_0\ \xi\right)\int dv$$

$$= M Y_0\ \xi$$

Więc takie siły działają w ten sposób jakgdyby całkowita siła MY_0 była przyłożona w środku bezwładności

---

Więc stutaj ten sam moment jakgdyby ciężar Mg działał w punkcie S

$$R = -\xi M g = -aMg\sin\varphi$$

Z zasady energii bezpośrednio: $\frac{1}{2} K \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \underbrace{\sum m g y}_{yg M} = const$

i przez różniczkowanie $K \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{d\varphi}{dt} + Mg a \frac{d\varphi}{dt} \sin\varphi$

Zatem:

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - M g a \sin\varphi$$

zupełnie to samo równanie jakie mieliśmy przy wahadle matematycznem

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin\varphi$$ jeżeli się postawi $\frac{1}{l} = a \frac{M}{K}$

Zatem czas wahnięcia: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = ~~2\pi\sqrt{\frac{aM}{gK}}~~ \; 2\pi \sqrt{\frac{K}{agM}}$

N. p. jeżeli mamy linię materyalną $K = \frac{l^2}{3} M \qquad a = \frac{l}{2}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$ t. j. tak samo jak wahadło matem. o długości $\frac{2l}{3}$

To samo można otrzymać z dawniejszego naszego rachunku względem wahadła złożonego z n punktów

Jeżeli kulę przyczepioną do sztaby o przekroju prostokątnym:

W ogólnym wypadku optymalnego położenia punktu przez który oś przechodzi:

$$K = K_0 + a^2 M$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{agM} + \frac{a}{g}}$$

Więc $= \infty$ dla $a = 0$ i dla $a = \infty$

więc między tem muszą być zawsze dwie ~~wart~~ wartości długości a dla pewnego T

$$g \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{K_0}{aM} + a$$

$$a^2 - a\, g \frac{T^2}{4\pi^2} + \frac{K_0}{M} = 0$$

$$a = g \frac{T^2}{8\pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gT^2}{8\pi^2}\right)^2 - \frac{K_0}{M}}$$

~~Jeżeli~~ Dodajmy teraz:

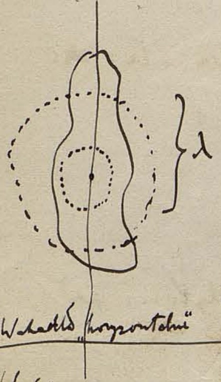
$\frac{a_1 + a_2}{1} = g \frac{T^2}{4\pi^2}$ więc: $T = 2\pi \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}}$

Tutaj ani masa M ani K_0 nie wchodzi zatem tak jak matematyczne wahadło długości $a_1 + a_2$

Tym sposobem mierzy się g, wahadło rewersyjne Katera.....

Żeby owe a_1 i a_2 nie były urojone: $\frac{gT^2}{8\pi^2} > \frac{K_0}{M}$

więc tylko możliwe dla $T > \frac{2\pi}{g}\sqrt{\frac{2K_0}{M}}$



0° $l =$ 99·103
45°: $l =$ 99·356 cm
90° 99·610

$g = 978{\cdot}103(1 + 0{\cdot}0051177 \sin^2\varphi)$

Korzyść oczywiście że nie potrzeba mierzyć K ani M

45°: 980·606

Pomiary ciężkości $g = g_0(1 - \alpha \sin^2\varphi)$

Zależność od szerokości geograficznej etc. etc.

Wahadło horyzontalne $y = a \sin\lambda = a \sin 2 \cos\varphi$ ‖ Wahadło sprężynowe (w zegarku) ‖ Wahanie przy metodzie torsyjnej mierzenie K przez dodanie ciężarków

Wróćmy jeszcze do naszego ~~ogólnego~~ przykładu mechanicznego, gdzie ciało obraca się koło osi nieruchomej. Jakie będą siły przyciskowe wywierane przez ciało? Wypadkowe siły naturalnie $= 0$, ale momenta P, Q mogą być $\gtrless 0$; na obrót koło osi są one naturalnie bez skutku ale mogą nas interesować z innych przyczyn.

$$P = \frac{d}{dt}\sum m\left(y_n \frac{dz_n}{dt} - z_n \frac{dy_n}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum m x_n z_n \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$y_n = r_n \sin\varphi_n = r_n \sin(\varphi + \varphi_n)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = r_n \cos\varphi_n \frac{d\varphi_n}{dt} = x_n \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = -r_n \sin\varphi_n \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r_n \cos\varphi_n \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Albo także:

$$= -\sum m z_n \frac{d^2y_n}{dt^2} = +\underbrace{\sum m y_n z_n}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \underbrace{\sum m x_n z_n}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Momenta dewiacyjne

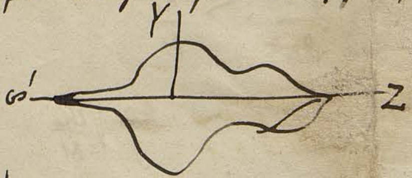


Jeśli więc n.p. obrót jednostajny: $\frac{d\varphi}{dt} = \text{const} = \omega$: $P = \omega^2 \sum m y z$, $Q = \omega^2 \sum m x z$ ‖ $R = xY - yX = \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)$

O istnieniu tych momentów także proste rozważanie co do skutków sił centryfugalnych nas o ich istnieniu przekonywa

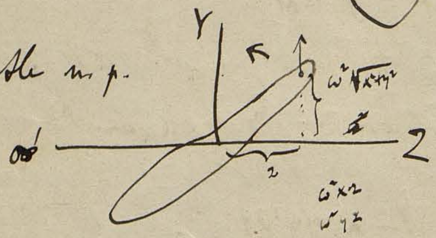
89

Jeżeli ciało symetryczne koło osi (więc ciało rotacyjne), albo jeżeli symetryczne względem płaszczyzny przechodzącej przez oś, to wszystkie te momenty dewiacyjne = 0



bo każdemu +z odpowiada równe −z

Ale n. p.

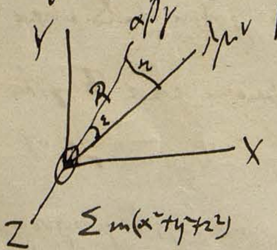


$\sum myz > 0$ P = przymusowa siła $\neq 0$

Jeżeli znamy K dla pewnej osi, jakie będzie K dla osi pochylonej pod pewnym kątem?

$K\omega^2 = \text{const}$

racyonalniej z energii kinetycznej!



$$K = \sum m r^2$$

$$= \sum m R^2 \sin^2 \varepsilon = \sum m R^2 (1 - \cos^2 \varepsilon)$$

$$= \sum m \overset{R^2}{\cancel{(x^2+y^2+z^2)}} \left[1 - (\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu)^2\right]$$

$\sum m(x^2+y^2+z^2)$

$$= \cancel{\sum m R^2} - \cos^2\lambda \sum m x^2 - \cos^2\mu \sum m y^2 - \cos^2\nu \sum m z^2 - 2\cos\lambda \cos\mu \sum m x y -$$

$$-2\cos\mu \cos\nu \sum m y z - 2\cos\nu \cos\lambda \sum m z x$$

$1 - \cos^2\lambda = \sin^2\lambda = \cos^2\mu + \cos^2\nu$

$$\cancel{= \sin^2\lambda \sum m x^2}$$

$$K = \cos^2\lambda \underbrace{\sum m(y^2+z^2)}_{K_x} + \cos^2\mu \underbrace{\sum m(z^2+x^2)}_{K_y} + \cos^2\nu \underbrace{\sum m(x^2+y^2)}_{K_z} - 2\cos\lambda\cos\mu \underbrace{\sum m x y}_{P_z} \ldots$$

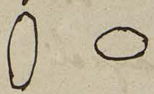
$$K = \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + \ldots}{\rho^2}$$

$$(\sqrt{K}\,\rho) = A\xi^2 + \ldots \qquad = 1$$

Więc jeżeli się wykreśli elipsoidę o osiach $\frac{1}{\sqrt{A}}$ itd. to K dla jakiejś bądź osi jest $K = \frac{1}{\rho^2}$

elipsoida momentów i osi główne

Więc wszystkie figury krystalów kształtu regularnego mają K równe wszędzie 

szczególnego  etc.

Jeżeli więc obierzemy osi główne jako osi współrzędnych: $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$

W nich oczywiście momenta dewiacyjne = 0, przy ruchu wirowym koło nich nie będzie potrzeba żadnych przymusowych par sił ~~(na oś)~~ więc będą to osi wolne ruchu

Więc rozkład mas ~~na~~ w ciele poruszającym się tylko o tyle ma wpływ na ~~ogólnie~~ $E = \frac{1}{2}K\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ ruch, o ile wpływają na wartości trzech wielkości A B C i ~~DEF~~ ~~FGH~~ (te ostatnie można sprowadzić na pierwsze?). ~~Każdą~~ ~~więc~~ Całkowita energia kinetyczna ~~~~ ~~w ciele~~ da się wyrazić:

$$E = \frac{1}{2}\sum\left[m_n\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$\delta x_n = + \delta x_0 + z_n\,\delta\beta - y_n\,\delta\gamma \qquad \text{więc:}\quad \frac{dx_n}{dt} = z_n\frac{d\beta}{dt} - y_n\frac{d\gamma}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2}\sum m_n\Big\{ z_n^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + y_n^2\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 - 2y_n z_n\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + x_n^2\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 + z_n^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - 2z_n x_n\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + y_n^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + x_n^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - 2x_n y_n\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}\Big\} =$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2\right]\sum m_n + {}$$
$$~~+ 2\frac{d\beta}{dt}\frac{dx_0}{dt}\sum m_n z_n + \cdots~~$$

jeśli środek masy

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\sum m(y^2+z^2) + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\sum m(z^2+x^2) + \cdots - 2\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\sum m y z - \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 K_x + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 K_y + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 K_z - 2\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt}D_x - \cdots\cdots\right\}$$

$K\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ = const

~~Nasze równanie dla ruchu obrotowego więc jest: $\frac{d}{dt}\left(K_x\frac{d\alpha}{dt}\right) = P$~~ $\frac{d\varphi}{dt}\cos\lambda = \xi$ $\quad \rho = \frac{d\varphi}{dt}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[K_x\cos^2\lambda + K_y\cos^2\mu + \cdots\right]$$

~~etc.~~

91

Jeśli zaś jako osi spółrzędnych obierze się główne osi ciała, wtedy momenty dewiacyjne będą zero; prędkości obrotowe w tym wypadku będziemy nazywali $p\ q\ r$

Zatem $E = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{K\omega^2}{2}$

Więc widać że ogólny wyraz energii ~~jest~~ i zależny tylko od 3 głównych momentów; z czego można już wnioskować że i momenta dewiacyjne muszą się dać wyrazić zapomocą $A\ B\ C$. Istotnie mamy:

x, y, z spółrzędne dowolnego kierunku osi, $\xi\ \eta\ \zeta$ w kierunkach osi głównych

$$D_2 = \sum m\,xy = \iiint xy\,dx\,dy\,dz =$$

$$x = \xi\cos(\xi x) + \eta\cos(\eta x) + \zeta\cos(\zeta x)$$

$$y = \xi\cos(\xi y) + \eta\cos(\eta y) + \zeta\cos(\zeta y)$$

$$dx\,dy\,dz = d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

gdzie $\xi\ \eta\ \zeta$ spółrzędne w kierunkach ~~głównych~~ osi.

$$= \iiint\Big[\xi^2\cos\xi x\cos\xi y + \eta^2\cos\eta x\cos\eta y + \zeta^2\cos\zeta x\cos\zeta y + 2\xi\eta(\cos\xi x\cos\eta x + \cos\xi y\cos\eta y)$$
$$+ 2\eta\zeta(\cos\eta y\cos\zeta y + \cos\eta z\cos\zeta z)$$
$$+ 2\zeta\xi(\cos\zeta z\cos\xi z + \cos\zeta x\cos\xi x)\Big]d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$\rho^2 - (\eta^2 + \zeta^2)$ $\quad \rho^2 - (\xi^2 + \zeta^2)$

$$\cos\xi x\cos\xi y + \cos\eta x\cos\eta y + \cos\zeta x\cos\zeta y = 0$$

$$= \iiint\Big[(\xi^2 + \zeta^2)\cos\xi x\cos\xi y + (\eta^2 - \zeta^2)\cos\eta x\cos\eta y + \ldots\Big]$$

$$= \iiint\Big[(\xi^2+\eta^2)\cos\xi x\cos\xi y - (\eta^2+\zeta^2)\cos\xi x\cos\xi y + (\eta^2+\xi^2)\cos\eta x\cos\eta y - (\xi^2+\zeta^2)\cos\eta x\cos\eta y + \ldots\Big]$$

$$= \iiint -(\xi^2+\eta^2)\cos\zeta x\cos\zeta y - (\eta^2+\zeta^2)\cos\xi x\cos\xi y - (\zeta^2+\xi^2)\cos\eta x\cos\eta y + \ldots\ldots$$

$$D_2 = -C\cos\zeta x\cos\zeta y - A\cos\xi x\cos\xi y - B\cos\eta x\cos\eta y$$

ponieważ $\iiint \xi\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ etc. $= 0$

Wróćmy teraz do ogólnych równań ruchu:

$$\frac{d}{dt}\left(K_x \frac{d\alpha}{dt}\right) = P \qquad \frac{d}{dt}\left(K_y \frac{d\beta}{dt}\right) = Q$$

Te równania o tyle nie są dogodne że wielkość K_x w każdym momencie się zmienia właśnie wskutek ~~tego~~ obrotu, więc różniczkując trzeba pisać:

$$\frac{dK_x}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + K_x \frac{d^2\alpha}{dt^2} = P$$

~~Więc nareszcie się mogło~~ Tylko jeżeli K jest równe we wszystkich kierunkach (lub jeżeli przypadkowo właśnie ruch względny odbywa się koło osi głównych), upraszczają się one na znane nam:

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} = P \qquad K\frac{d^2\beta}{dt^2} = Q \qquad K\frac{d^2\gamma}{dt^2} = R$$

W tych równaniach jest zawarte to co nazywamy zwykle: skłonność do zachowania płaszczyzny ~~d~~ wirowania:

Jeżeli $P = Q = R = 0$ będziemy mieli

$K\frac{d\alpha}{dt} = \text{stała}$ i podobnie inne dwa; dla wygodności położymy oś Y w oś obrotu największego:

$$K\frac{d\alpha}{dt} = 0 \qquad K\frac{d\beta}{dt} = B \qquad K\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

(impuls jako podczas czasu τ)

Teraz chcemy ~~...~~ obrócić oś obrotu, przyczepiając pewien moment R; gdyby ciało nie wirowało, to one podda się ~~...~~ owemu momentowi i przyjmie prędkość obrotową $\frac{R\tau}{K}$ koło osi R. Tymczasem tu co nastąpi?

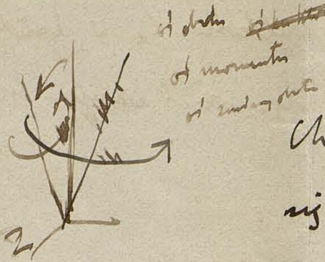
$$K\frac{d\alpha}{dt} = 0 \qquad K\frac{d\beta}{dt} = B \qquad K\frac{d^2\gamma}{dt^2} = R$$

$K\frac{d\gamma}{dt} = R\tau = \beta$ (małe

$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{R\tau}{K} = C$ (~~to~~ a gdy owa siła ustanie to pozostanie takie same.

Teraz więc ~~...~~ obrót całkowity powiększył ~~się~~, będzie $\sqrt{B^2+C^2}$ a oś obrotowa będzie pochylona ku osi ~~X~~ Z





Chcieliśmy obrócić ku osi (X), a pomykło się ciało ku osi Z

$\operatorname{tg} t = \varepsilon$ $\quad \sin\varepsilon = \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}$ $\quad$ jeśli C małe $= \frac{C}{B}$

więc zależy od prędkości obrotu B i będzie wogóle małe jeśli B wielkie, więc zdaje się jak gdyby ciało wywierało pewną reakcyę przeciw zmianie osi i zachowaniu kierunku osi. Całkiem inaczej jak gdyby nie było obrotu

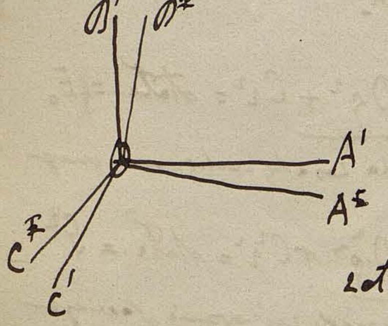
Jeśli zaś K nie jest równe we wszystkich kierunkach to owe równania nie są praktyczne; można je przekształcić wprawdzie tak że w nich K-y będą wyrażone przez A B C, ale to bardzo skomplikowane. Nasuwa się zaś myśl, czy się nie uproszczą znacznie ~~przez~~ odnoszeniu obrotu do osi głównych, ponieważ wtedy K są stałe. Ale wtedy kierunek osi, koło których prędkości obrotowe są p q r będzie zmienny. Zatem zadanie: Przyśpieszenia momentów obrotowych i także siły rozłożyć na kierunki zmienne osi. Zupełnie coś podobnego widzieliśmy już raz przy rozłożeniu przyspieszenia na pewny w kierunku stycznej i w kierunku normalnym.

$w_s = \frac{d^2 v}{dt^2}$ $\qquad w_n = \frac{v^2}{R}$

Tak i tutaj: (w pewnym momencie t przedstawmy sobie położenie ciała) i włóżmy osi spółrzędnych w jego osi ~~...~~ główne

Znając położenie osi mamy rozłożyć momenty sił względem nich; nazwiemy je: P Q R (Nasze równania w swej formie odnoszą się tylko do stałych kierunków osi, więc nie można je odnosić do osi zmiennego kierunku. Jak tutaj. Dla osi zmiennych przyjmą one inny kształt który tu znajdziemy.)

Wtedy więc n.p. P równa się według naszych równań ruchu zmienności momentów obrotowych względem osi X w której ze czasem t znajduje się oś A prędkość obrotowa koło niej $= p$, zatem moment Ap



Po upływie czasu Δt; moment będzie inny $A(p+\Delta p)$ ale także inny kierunek, więc w kierunek osi A wypada tylko $A(p+\Delta p)\cos AOA'$

zato przychodzą do tego jeszcze części momentów obrotowych koło osi B i C: $+ B(q+\Delta q)\cos\underbrace{(B'OA)}_{>\frac{\pi}{2}} + C(r+\Delta r)\cos C'OA$

teraz: $\angle AOA' = \Delta t\sqrt{q^2+r^2}$

więc $\cos(AOA')$ jest rzędu: $(1-\delta^2) = 1-\Delta t^2(q^2+r^2)$

natomiast: $AOB' = \frac{\pi}{2} + r\Delta t$ $\quad \cos AOB' = -\sin(r\Delta t) = -r\Delta t$

$AOC' = \frac{\pi}{2} - q\Delta t$ $\quad \cos AOC' = \sin(q\Delta t) = q\Delta t$

W całości więc:

$$P = \frac{A(p+\Delta p)\left[1-\Delta t^2(q^2+r^2)\right] - Ap + B(q+\Delta q)\, r\Delta t + C(r+\Delta r)\, q\Delta t}{\Delta t}$$

$$\left.\begin{aligned} &= A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = P \\ &B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = Q \\ &C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = R \end{aligned}\right\}$$

Tak samo:

Sławne równania Eulera

Obrót swobodny ciała na którego nie działają żadne siły.

Jeżeli nie działają żadne momenty sił, wtedy można je łatwo rozwiązać:

$$
\begin{aligned}
p \quad & A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = 0 \\
q \quad & B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = 0 \\
r \quad & C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = 0
\end{aligned}
$$

Zanim przejdziemy do ścisłego całkowania, chcemy ~~[illegible]~~ najpierw wyciągnąć kilka ~~ogólnych~~ wniosków za pomocą rozważań geometrycznych.

[Naturalnie oś tylko pozostanie stała jeżeli ~~[illegible]~~ moment całkowity w kierunku jednej z głównych osi]

Pomnożymy przez p, q, r:

$$A p\frac{dp}{dt} + B q\frac{dq}{dt} + C r\frac{dr}{dt} = 0$$

więc: $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{stała} = E_0$

odpowiada zasadzie zachowania energii

Pomnożywszy przez Ap, Bq, Cr:

$$A^2 p\frac{dp}{dt} + \dots$$

L moment

$$L^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{stała} = G$$

odpowiada zasadzie zachowania płaszczyzny niezmiennego momentu

Równanie elipsoidy bezwładności było:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

jeżeli więc elipsoidę bezwładności wykreśli się w takich rozmiarach ~~i długości~~ ~~by były w stosunku~~ to będziemy mieli $\xi = \frac{p}{\sqrt{E}}$ zatem ~~nie~~

$\eta = \frac{q}{\sqrt{E}}$ $\quad p = \sqrt{E}\,\rho\cos(p\rho)$ etc.

~~[illegible]~~ pomnożony spółczynnik $\frac{1}{\sqrt{E}}$

długość $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ oznaczy prędkość obrotową koło tej osi chwilowej

Z drugiej strony $p\ q\ r$ muszą też zadość uczynić drugiemu równaniu zatem leżeć na przecięciu tych dwóch elipsoid, zatem kierunki osi chwilowych oznaczony przez krzywą skośną przechodzącą przez przecięcie tych dwóch elipsoid; położenia osi samych będą ~~płaszczyzną~~ tworzyły stożek drugiego stopnia

równanie pł. stycznej w punkcie pqr: $App' + Bqq' + Crr' = E_0$ się dotyka: .. → równanie pł. niezmiennej

wszystkie kierunki osi niezmiennej, tutaj prostopadle kierunek pł. niezmiennej, a oś zmienna

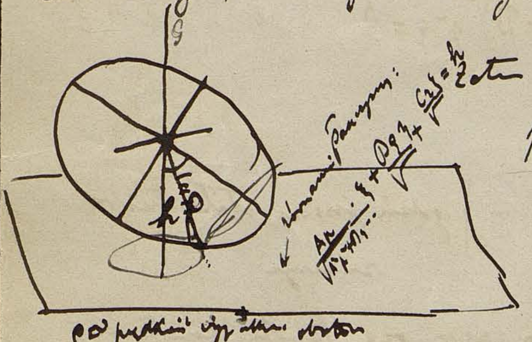
Tą krzywą stożkową zakreśloną na powierzchni elipsoidy bezwładności nazywamy polhodyą. (Boltzmann II)

Na tem nie koniec: Z pierwszego równania

$$p \cdot \frac{Ap}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}} + q \cdot \frac{Bq}{\sqrt{\ }} + r\,\frac{Cr}{\sqrt{\ }} = \frac{2E_0}{\sqrt{G^2}}$$

$G = \sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2} = const.$!

to są zaś momenty obrotowe składowe podzielone przez moment całkowity, zatem równają się cos kątów między kierunkami osi p, q, r i osią momentu całkowitego, która jak wiemy z dawniej jest niezmienna



zatem

$$p\cos(Gp) + q\cos(Gq) + r\cos(Gr) = \text{stała}$$

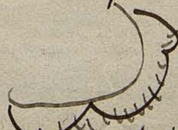
$$p = \rho\cos(p\rho) \quad \text{itd, zatem} \qquad (\sqrt{E})$$

$$\rho\cos(\rho G) = \text{stała} = h = \frac{(2E_0)^{3/2}}{G}$$

zatem odległość punktu O od płaszczyzny ($\perp G$) stycznej jest stała.

To znaczy więc że ciało tak będzie się obracało że elipsoida bezwładności będzie się dotykała płaszczyzny niezmiennej momentu wypadkowego, pozostając w niezmiennej odległości od niej.

Łącznica punktu O i punktu styczności oznacza kierunek osi chwilowej obrotu. Będzie ona zakreślała na swej elipsoidzie krzywą zwaną polodyą — a naturalnie punkty styczności na płaszczyźnie niezmiennej będą tworzyły inną krzywą (płaską) postaci



(nie odpowiada!)

zwaną herpolodyą.

ρ = oś chwilowego obrotu zatem [illegible] w chwili styczności jest niezmienny, bez tarcia potoczenia, więc jest to ruch bez ślizgania, obracania się

Widzimy że polodya koło osi max i min może być zamkniętą małą krzywą, a polodya koło minimum idzie dokoła osi [illegible] minimum właściwie oś obrotu

§7 ~~trwony~~ Wirowy teraz jakie położenia ciało z czasem będzie zajmowało, ale chodzi nam jeszcze o zależność od czasu. W tym celu trzeba całkować równania Eulera

W ogólnym wypadku otrzymuje się funkcye eliptyczne:

~~$p = a \cos\psi$~~
~~$q = b \sin\psi$~~
~~$r = c\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}$~~ ~~$\psi =$~~

$$p = a \cos am(\lambda t + \mu)$$
$$q = b \sin am(\lambda t + \mu)$$
$$r = c\, \Delta\, am(\lambda t + \mu)$$

(Winkelmann I p. 92)

Routh III p. 94

zbiera też Eulera) przypadki
$\Pi = 303$ dni
do lata 420
Rudzki pa 140

Jeżeli zaś ciało rotacyjne: $B = C$:

$p =$ stałe

$A \frac{dp}{dt} = 0$

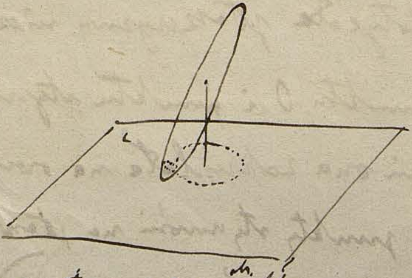
$$B\frac{dq}{dt} + (A-B)\, r p = 0$$
$$B\frac{dr}{dt} + (B-A)\, p q = 0$$
$$\Bigg\}\quad B^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + (A-B)^2 p^2 q = 0$$

$$q = c\cos(\lambda t + \mu) \qquad r = c \sin(\lambda t + \mu)$$ } gdzie jeszcze stałe trzeba oznaczyć

zatem zna się i położenie osi chwilowej ρ, a zapomocą tamtej konstrukcyi geometrycznej i położenie osi głównych, więc i ciała samego.

Jeżeli zaś działają momenty sił to zadanie naturalnie wiele skomplikowańsze.

$r = \frac{B}{A-B}\frac{dq}{dt}\frac{1}{p}$ $\qquad \frac{B^2 \frac{d^2 q}{dt^2}}{A-B\; p}$ —



$$B^2\lambda^2 + (A-B)^2 p^2 = 0$$
$$\lambda = \frac{A-B}{B}\, p$$
$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{p}\frac{B}{A-B}$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+c^2}} = \text{const}$$ nachylenie osi ch. stałe

ten okres czasu mniejszy im różnica $A-B$, im większa prędkość obrotu
w razie $A = B$ lub $k = 0$ $\quad T = \infty$ dowolna orientacja niezmienna

!

$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$

$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$

$z = z'$

$\delta x = \delta x'\cos\omega t - \delta y'\sin\omega t$

$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$

$\dot x = \dot x'\cos\omega t - \dot y'\sin\omega t - \omega x'\sin\omega t - \omega y'\cos\omega t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t - 2\omega\frac{dx'}{dt}\sin\omega t - 2\omega\frac{dy'}{dt}\cos\omega t - \omega^2 x'\cos\omega t + \omega^2 y'\sin\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \quad \sin\ + \quad \cos\ + \quad \cos\ - \quad \sin\ - \sin\ - \cos$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$$

$$\sum\Big[\delta x'\Big\{m\frac{d^2x'}{dt^2} - X' - m\omega^2 x' - 2m\omega\frac{dy'}{dt}\Big\} + \delta y'\Big\{m\frac{d^2y'}{dt^2} - Y' - m\omega^2 y' + 2m\omega\frac{dx'}{dt}\Big\} + \delta z'\Big\{m\frac{d^2z'}{dt^2} - Z'\Big\}\Big] = 0$$

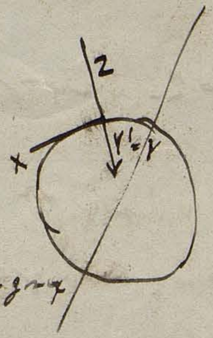
[illegible] $m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$ = [illegible]

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \Xi' + 2\omega\frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = H' - 2\omega\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z'$$





$\Xi' = -g\cos\psi \quad H' = 0 \quad Z' = -g\sin\psi$

$X = Y = 0 \quad Z = g$

$x = +x'\sin\psi \mp z'\cos\psi$

$y = +y'$

$z = +x'\cos\psi + z'\sin\psi$

$x\sin\psi + z\cos\psi = x'$

$x\cos\psi - z\sin\psi = -z'$

$x' = -x \sin\psi - z\cos\psi$

$z' = x\cos\psi - z\sin\psi$

$y' = y$

$-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\psi - \frac{d^2z}{dt^2}\cos\psi = -g\cos\psi + 2\omega\frac{dy}{dt}$

$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\psi - \frac{d^2z}{dt^2}\sin\psi = ~~+2\omega\left[\frac{dx}{dt}\sin\psi - \frac{dz}{dt}\cos\psi\right]~~ - g\sin\psi.$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left[\frac{dx}{dt}\sin\psi - \frac{dz}{dt}\cos\psi\right]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +2\omega\sin\psi\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left[\frac{dx}{dt}\sin\psi + \frac{dz}{dt}\cos\psi\right]$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\cos\psi\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2\omega\sin\psi \cdot y$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma - gt + 2\omega y\cos\psi$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta + 2\omega(\alpha\sin\psi + \gamma\cos\psi)t + \omega\cos\psi\, gt^2 + \ldots$$

$$x = \alpha t + \omega\beta\sin\psi . t^2$$

$$y = \beta t + \omega(\alpha\sin\psi + \gamma\cos\psi)t^2 + \omega\cos\psi\frac{gt^3}{3}$$

$$z = \gamma t + \left(\frac{g}{2} - \omega\beta\cos\psi\right)t^2$$

$\beta = 0 \,||\, \gamma = 0$

$x = \alpha t$

$y = -\alpha\omega\sin\psi\, t^2 + \omega\cos\psi\frac{gt^3}{3}$

$z = \frac{gt^2}{2}$

Nur $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$x = 0$

$y = \omega\cos\psi\frac{gt^3}{3}$

$z = \frac{gt^2}{2}$

Reich Freiberg

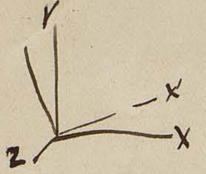
$\psi = 50°27' \,|\, g = 981'1 \,|\, z = 158^m5$

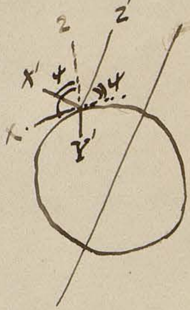
$y = 2'75$ cm

beobachtet $2'84$

$\alpha = 0 \,||\, \gamma = 0$

$x = \beta\omega\sin\psi . t^2$





$\Xi' = -g\cos\psi$

$Z' = -g\sin\psi$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\Xi\sin\psi - Z'\cos\psi) + 2\omega\sin\psi\frac{dy'}{dt} \qquad = \qquad 2\omega\sin\psi\frac{dy'}{dt} + \lambda x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = H \qquad - 2\omega\left(\sin\psi\frac{dx}{dt} + \cos\psi\frac{dz}{dt}\right) = -2\omega\left(\sin\psi\frac{dx}{dt} + \cos\psi\frac{dz}{dt}\right) + \lambda y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (\Xi\cos\psi + Z'\sin\psi) + 2\omega\cos\psi\frac{dy'}{dt} \qquad = -g + 2\omega\cos\psi\frac{dy'}{dt} + \lambda(z-l)$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = (2gz + H)$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\psi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) + \cancel{2\omega\cos\psi\, x\frac{dz}{dt}}$$

$$z = -\frac{x^2+y^2}{2l}$$

$$x\,dy - y\,dx = [c + \omega\sin\psi(x^2+y^2)]\,dt$$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{g}{l}(x^2+y^2) + H$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = (c + r^2\omega\sin\psi)$$

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \left(\frac{g}{l}r^2 + H\right)$$

$\theta - t\omega\sin\psi = \vartheta$

$r^2 d\vartheta = c\,dt$

$$\frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2} = \left[\left(\frac{g}{l} - \omega^2\sin^2\psi\right)r^2 + H - 2c\omega\sin\psi\right]$$

$$= \left(\frac{g}{l}r^2 + h\right)$$

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}r^2 + h$$

$$\frac{c^2}{r^2}$$

$$k\frac{d^2r}{dt^2}\cancel{\frac{dr}{dt}} - \frac{kc^2}{r^3}\cancel{\frac{dr}{dt}} = +\frac{2g}{l}r\cancel{\frac{dr}{dt}}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}r$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\alpha + \beta r^2 - \frac{\gamma}{r^2}}} = dt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x + \alpha\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}y - \alpha\frac{dx}{dt}$$

~~x = a sin ft sagt~~

~~x = x' x z~~

$$d\phi = \frac{c\,d\theta}{a^{-}\sin^2\theta \sqrt{\frac{g}{a}\cos\theta - \frac{c^2}{2a^2}\frac{1}{\sin^2\theta} + \text{const}}}$$

$$= \frac{c\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{\left(C + \frac{g}{a}\cos\theta\right)\sin^2\theta - \frac{c^2}{2a^2}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{\delta U}{\delta p}$$

$$\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) \cdot \delta p + \cdots = -\delta U$$

$$2\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\,\delta \dot{p} + \quad\right] = 2L$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\,\delta p\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\,\delta \dot{p} \cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0$$

$$q \qquad \frac{\partial L}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\delta L = \Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial p}\,\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\,\delta \dot{p}\right)$$

$$= \Sigma(\dot{q}\,\delta p + q\,\delta \dot{p}) = \delta \cdot \Sigma(q\,\dot{p}) + \Sigma(\dot{q}\,\delta p - \dot{p}\,\delta q)$$

$$\delta\underbrace{(\Sigma q\dot{p} - L)}_{H} = $$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\dot{q}$$

$$+\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}$$

~~$L = x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$~~

$$L = m a^2 \varphi'^2$$

$$H = \frac{1}{2} q^2 - \frac{g}{l}\cos p \qquad p = \varphi \qquad q = m a^2 \dot{\varphi}$$

$$= \frac{m^2 a^4 \varphi'^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{g}{l}\sin p = -\dot{q} = -m a \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = q = \dot{p} = \dot{\varphi}$$

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k + \sum \lambda_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_k}$$ 1

$$\varphi_e(x, y, \ldots) = 0$$

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} x_k' + \ldots\right) = 0$$

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \ddot{x}_k + \ldots\right) = \Phi = 0$$

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \ddot{x}_{k0} + \ldots\right) = \Phi$$

$$\sum\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)(\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0}) \ldots = 0$$

$$\underbrace{(\ddot{x}_k - \ddot{x}_{k0})}_{\delta \ddot{x}}$$

$$\sum (m \ddot{x} - X)\delta \ddot{x} + \ldots = 0$$

$$\delta \sum (m\ddot{x} - X_k)^2 + \ldots = 0$$

$$\frac{\partial\left(2\pi r \kappa \frac{\partial \theta}{\partial r}\right)}{\partial r} = -2\pi r c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$r\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{c\rho}{\kappa} r \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{c\rho}{\kappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

$$\theta = \Phi(r)\, e^{-\alpha t}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \alpha \frac{c\rho}{\kappa}\varphi = 0 \qquad r\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha c\rho}} = x \qquad \varphi = y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad J_\nu$$

$$J_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2.4)^2} - \frac{x^6}{(2.4.6)^2} + \ldots$$

~~$J_0(x)_{x=\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$~~

$$r\frac{\partial \theta}{\partial r} = \alpha$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\alpha}{r}$$

$$\theta = \alpha \lg r + \beta$$

$\theta = f(x)$.

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dx} - \frac{x^2}{r^3}\frac{d\theta}{dx} + \frac{x^2}{r^2} [illegible]$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \qquad \dot{p}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}} - T + V = \text{const } E$$

$$\int \left[\frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\delta \dot{p}\right] dt + T\,\delta t_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial p}$$

$$\delta T = \sum\left(\frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\delta \dot{p}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right) + \frac{\partial U}{\partial p}$$

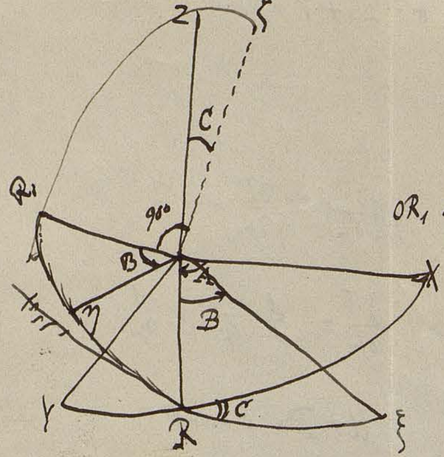
$$= \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\delta p\right) + \sum \frac{\partial U}{\partial p}\delta p$$

$$U + T = E = \text{const}$$

$$\frac{\partial U}{\partial p} = -\frac{\partial T}{\partial p}$$

$$\sum\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right)\delta p + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\delta \dot{p}\right]$$

$$\int \underbrace{\qquad} = \delta p \frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\Big| - \int \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}}\right)\delta p$$



	obrót koło Z δA	obrót koło ζ δB	obrót koło OR δC
$O\xi$	$-\sin B \sin C\, \delta A$		$\cos B\, \delta C$
$O\eta$	$\cos B \sin C\, \delta A$		$\sin B\, \delta C$
$O\zeta$	$\cos C . \delta A$	$-\delta B$ $= \frac{d\varphi}{dt}$	

($O\xi$, $O\eta$: OR_1)

$$\lambda = \frac{d\varphi}{dt} = -\sin B \sin C . A' + \cos B . C' \quad = \omega \cos(\Omega \xi)$$

$$\mu = \frac{d\psi}{dt} = \cos B \sin C . A' + \sin B . C' \quad = \omega \cos(\Omega \eta)$$

$$\nu = \frac{d\chi}{dt} = \cos C . A' - B' \quad = \omega \cos(\Omega \zeta)$$

$$T = \frac{1}{2}\left[G\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + H\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + J\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[G\lambda^2 + H\mu^2 + J\nu^2\right]$$

$$= f(A' \; B' \; B'') \qquad \underline{\lambda = B}$$

$$\frac{\partial T}{\partial B'} = -J\nu \qquad \left(= -\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial B} = -\mu \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial T}{\partial \mu}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right) = -J \frac{d\nu}{dt} = -(G+H)\lambda\mu + F$$

$$H \frac{d\mu}{dt} = (J-G)\lambda\nu + E$$

$$G \frac{d\lambda}{dt} = (H-J)\mu\nu + D$$

$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \omega^2$

$B = \frac{\pi}{2} - \psi$

$A = \varphi$

$C = \theta$

$$\delta\int (T-V)\, dt = 0$$

$$\int\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial r}\delta r + \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\delta\dot{r}\right) dt = 0$$

$$\delta r\,\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\Big/ - \int \delta r\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) dt$$

$$\frac{d}{dt}\,T \;__$$



$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \delta y_1 + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \delta y_2 - \ldots = 0$$

$$x_1 = a \sin\varphi$$

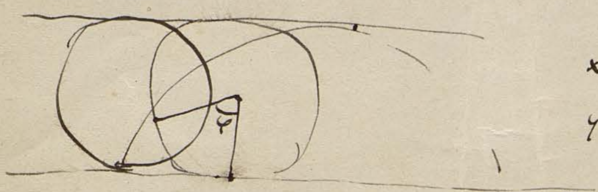
$$(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \cos^2\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} \delta\varphi - (m_1 a_1 + m_2 a_2) g\, \delta\varphi \sin\varphi = 0$$

$$+ m_1 a_1^2 \ldots \sin^2\varphi) -$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{m_1 a_1 - m_2 a_2}{m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2} g \varphi$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \delta x_1 + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \delta x_2 = 0$$

$$m_1 a_1^2 \quad m_2 a_2^2 = 0$$



$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = a(1 - \cos\varphi)$$

$$\pi - \varphi = \psi$$

$$x = a(\pi - \varphi + \sin\varphi) = a(\psi + \sin\psi)$$
$$y = a(1 + \cos\varphi) = a(1 - \cos\psi)$$

$$dx = a(1 + \cos\psi)\, d\psi = 2a \cos^2\frac{\psi}{2}\, d\psi$$
$$dy = a \sin\psi\, d\psi = 2a \sin\frac{\psi}{2} \cos\frac{\psi}{2}\, d\psi$$

$$ds = a\, d\psi \sqrt{(1+\cos\psi)^2 + \sin^2\psi}$$
$$\sqrt{2(1+\cos\psi)}$$
$$= 2\cos\frac{\psi}{2}\, d\psi$$

$$s = 4a \sin\frac{\psi}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2a\sqrt{1-s^2}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2as\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2a \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2a\sqrt{1-s^2}\frac{d^2s}{dt^2} \quad \Bigg| \quad \sqrt{1-s^2}\,\delta s$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2a\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2as\frac{d^2s}{dt^2} \quad \Bigg| \quad s\,\delta s$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} =$$

$2a \sin\frac{\psi}{2}$

$$M c_0 (1 + \alpha t) d\theta = \alpha (1 + \beta \theta)^{\theta} dt$$

$$\theta^4 - \theta_0^4$$

$$\frac{d\theta}{}$$

$$\theta_0^4 + 4 \theta_0^3 \tau + 6 \theta_0^2 \tau^2 \ldots - \theta_0^4$$

Nr 1. $s = act$

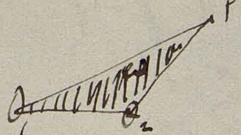
$\omega = \frac{a^2}{2} c t$ $\qquad$ $\omega = \frac{a}{2} s$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$d\omega = y\,dx - x\,dy$

Ale odwrotnie x y nie dadzą się wyrazić przez s, ω

Ale bez żadnej trudności równania tego się rozwiąże np. jeśli jako współrzędne obierzemy powierzchnię ω oraz długości $l_1 + l_2$ odstępów od dwóch danych punktów



$$\begin{cases} l_1 + l_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \\ \omega = a y \end{cases}$$

Chodzi o całkowalność tak samo jak przy warunkach holonomicznych albo nieholonomicznych.

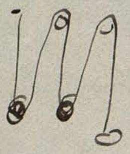
Uwaga

$$2L = r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \dot{r} \qquad m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\left(m\, r^2 \dot{\varphi}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

gdyż r jest współrzędną prostokątną, [illegible] ~~[illegible]~~ podanie, że [illegible] w danej chwili ~~[illegible]~~ być [illegible] (współrzędnej) do [illegible] położenie współrzędnej w danej chwili



$$2L = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = l$$

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c}{r^2}$$

Czy można np. jako współrzędne wprowadzić: 1). r

2). $\int r^2 d\varphi = \omega$

wtedy $\frac{d\omega}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt}$

$$L = \left[\dot{r}^2 + \frac{\dot{\omega}^2}{r^2}\right]\frac{m}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{m\,\dot{\omega}^2}{r^3}$$

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{r^3}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

nie, bo wprawdzie $dr\ d\varphi$ dadzą się wyrazić przez $dr\ d\omega$ ale nie dadzą się wyrazić $\delta r\ \delta\varphi$ przez $\delta r\ \delta\omega$

Istotnie otrzymalibyśmy równania fałszywe by

Jeśli dane $r = \varphi(t)$

$\omega = \psi(t)$

istotnie ruch jest zupełnie określony

bo byłoby $r^2\frac{d\varphi}{dt} = \psi'(t)$

$\varphi = \int \frac{\psi'(t)}{[\varphi(t)]^2}dt$ więc r, φ dadzą się wyrazić przez r, ω; ale nie bezpośrednio!

Także podanie drogi i odległości: $s = \int[dr^2 + (r\,d\varphi)^2]$ $\omega = \int r^2 d\varphi$ nie wystarczą one nie są współrzędnemi w prawdziwym sensie. Mimo że podanie $s = \varphi(t)$, $\omega = \psi(t)$ ruch punktu zupełnie określa

kształt toru ~~w tym razie określony przez [illegible]~~

$$\frac{a}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g\cos\theta + \text{const}$$

$$= -g\sin^2\frac{\theta}{2} + \text{const}$$

$$C$$

~~$a^2\dot\theta^2 = 2gh - 4ga\sin^2\frac{\theta}{2}$~~

$$\sin\frac{\theta}{2} = x$$

$$\frac{d\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = dx$$

$$4\frac{a}{2}\frac{\dot x^2}{1-x^2} = -gx^2 + c$$

$$\sqrt{2a}\;\frac{\dot x}{\sqrt{(1-x^2)(c-gx^2)}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2a}{c}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{g}{c}x^2)}} = dt$$

Jeśli $c > g$ to $\frac{d\theta}{dt} > 0$

Jeśli $c < g$ [illegible]

$$\frac{g}{c}x^2 = y$$

$$x = \frac{cy}{g}$$

$$\sqrt{\frac{2a}{g}}\int_0^{\frac{cy}{g}=1}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\frac{cy^2}{g})}} = dt$$

$$y = \sin\varphi$$

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}}\int_0^{\frac{cy}{g}=1}\frac{dy}{\sqrt{\cdots}}$$

$$\frac{2a}{\sqrt c}\;\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{g}{c}\sin^2\varphi}} = dt$$

Jeśli $c < g$ $\quad T = \frac{2a}{\sqrt c}\int_0^{\frac{g}{c}\sin^2\varphi=1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{g}{c}\sin^2\varphi}}$

$$\sqrt{\frac{g}{c}}\sin\varphi = \sin\theta$$

$$d\varphi\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\varphi = \cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{\frac{g}{c}}\,d\varphi = \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\frac{c}{g}\sin^2\theta}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{c}{g}\sin^2\theta}}$$

Jeśli $g < c$

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{c}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$v = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$\sin\varphi = \sin\operatorname{am} v$ (Jacobi)

$$E - U = L \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p}\dot p + \frac{\partial E}{\partial \dot p}\ddot p$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot p}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \qquad \dot p \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot p}\right) + \frac{\partial U}{\partial p}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot p}\dot p\right) + \frac{\partial U}{\partial p}\dot p \qquad \frac{dU}{dt}$$

$$E = 2E + U \text{ const}$$

$$E + U = \text{const}$$

$L = f.(p\ q\ r\ \dot p\ \dot q\ \dot r \ldots)$ ale niech nie zawiera czasu (wyraźnie niezależne od t)

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot p}\ddot p + \frac{\partial L}{\partial p}\dot p$$

$$= \dot p \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot p}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot p \frac{\partial L}{\partial \dot p}\right)$$

$$\therefore \quad L = \sum \dot p \frac{\partial L}{\partial \dot p} + \text{const} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot p} = \frac{\partial E}{\partial \dot p}$$

$$E - U = \sum \dot p \frac{\partial E}{\partial \dot p}^{\text{const}} = 2E^{\text{const}}$$

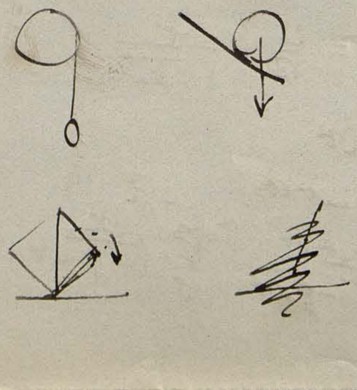
$$E + U = \text{const}$$

Jeśli tylko 1 stopień swobody to wystarczy do całkowania

bo otrzymuje się $\quad \dot p = f.(p)$

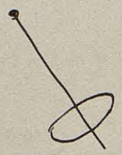
$$t = \int \frac{dp}{f(p)} + \text{const}$$

E Punkt poruszający się po krzywej stałej

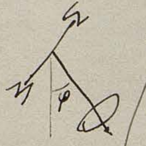


A propos krążka :

Jeśli szybko wirujący krążek zawieszony, to ~~tego~~ prawie nie zmienia θ, tylko φ



Jeśli zaś zawieszony koło osi obrotu 2 stale wymuszonej :



1). Bąk się wahać wspólnie jak wszystko wahadło

2). Prędkość wirowania byłaby ~~[illegible]~~ nie zmienna (z powodu zachowania energii) ‼

$$K_z \frac{dz}{dt} = - Mg \sin \varphi$$

~~$K_z = \text{const}$~~ K_z niezmienne $= A$

Jeśli przyjąć łączący jest do pewnego stopnia giętki ?

Krążek w okresach

$$L = A\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right] + C\left[\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right]^2$$

?

$$\frac{d}{dt}\left[A\,\dot{\theta}\right] - A\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + C\left[\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right]\sin\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Związki holonomiczne i nieholonomiczne (Hertz) Whittaker p.

Kula tocząca się po nieruchomej płaszczyźnie

$\delta s^2 = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = \sqrt{a\, d\theta^2 + d\varphi \ldots}$

niecałkowalny związek

jeśli 2 zmienne niezal. to zawsze całkowalne ale np.

$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$

warunek całkowalności:

$dz = -\left(\frac{P}{R}dx + \frac{Q}{R}dy\right) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right)$ (Hertz II p. ..)

Podobnie jak energia punktu podlegającego siłom ~~[illegible]~~ dyssypacyjnym

$\delta L = -(X\,\delta x + V\,\delta y + W\,\delta z)$

$= -\left[f_1(xyz)\,\delta x + f_2(xyz)\,\delta y + f_3(xyz)\,\delta z\right]$

Ale nie da się znaleźć żaden związek formy $F(L, x, y, z) = 0$ ←

Czy to prawda? Z pewnością nie istnieje $L + f(xyz) = 0$. ale czy nie istnieje?

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = (K_0 + a^2 M)\dot\varphi$$

$$(K_0 + a^2 M)\ddot\varphi = Mga\sin\varphi$$

$$(K_0 + a^2 M)\dot\varphi^2 = 2Mga(1 - \cos\varphi) \quad [\cos\varphi_0]$$

$$2Mga\,dt = \sqrt{\frac{K_0 + a^2 M}{1-\cos\varphi}}\,d\varphi$$

$$MgaT = \sqrt{\frac{K_0+a^2M}{2}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} = \infty$$

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} = \int_{\cos\varphi_0}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\cos\varphi_0 - x)}}$$

$$dx = \sin\varphi\,d\varphi = d\varphi\sqrt{1-x^2}$$

tem większa różnica im większy stosunek $\frac{a^2M}{K}$

N. p. jeśli $K_0 \gg Ma^2$ to nie ma różnicy

$K_0 = 0$

$T = \infty$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = (K_0 + a^2 M\sin^2\varphi)\dot\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = a^2 M\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2$$

$$(K_0 + a^2M\sin^2\varphi)\ddot\varphi + 2a^2M\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - a^2M\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 = Mga\sin\varphi$$

$$\sin\varphi\cdot\ddot\varphi + \cos\varphi\,\dot\varphi^2 = \frac{d}{dt}(\sin\varphi\cdot\dot\varphi)$$

$$K_0\ddot\varphi + a^2M\sin\varphi\frac{d}{dt}(\sin\varphi\cdot\dot\varphi) = Mga\sin\varphi$$

$$K_0\dot\varphi\ddot\varphi + (\sin\varphi\cdot\dot\varphi)\left[a^2M\frac{d(\sin\varphi\cdot\dot\varphi)}{dt} - Mga\right] = 0$$

$$K_0\frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{a^2M}{2}(\dot\varphi\sin\varphi)^2 + Mga\cos\varphi = \text{const.}$$

Także bezpośrednio z r. energii

$$\dot\varphi^2\left[K_0 + a^2M\sin^2\varphi\right] = 2Mga(1-\cos\varphi)$$

$$2Mga\,dt = \sqrt{\frac{K_0 + a^2M\sin^2\varphi}{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}}\,d\varphi$$

więc prędzej aniżeli tam, szczególnie w pierwszym czasie

$$a^2M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}} = a^2M\int_1^0\frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 2a^2M\sqrt{1-x}\Big|_1^0 = 2a^2M$$

$$T = \frac{a}{g}$$

to wystarcza jeśli 1 zmienna niezal.

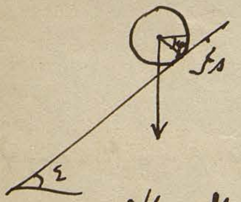
ale nie wystarcza jeśli więcej zm. niezal.

Inny przykład: walec toczący się po równi pochyłej. (całkowicie szorstkiej)

1). Atwood

2). Ciało obracające się koło osi pochylonej poziomej (żyroskop)

3). 1 walec wewnątrz drugiego pustego



$$T = \frac{1}{2} K \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{M}{2} v^2$$

$$s = a\varphi \qquad v = a\frac{d\varphi}{dt}$$

$$T = \frac{1}{2}(K + a^2 M)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$



$$-\frac{\partial U}{\partial y} = -Mg \text{ więc } U = Mg\,y = Mg\,a \sin\varepsilon \cdot \varphi + \text{const}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(K + a^2 M) = Mg\,a\sin\varepsilon$$ lub też wyrazić s jako współrzędną.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{Mg \sin\varepsilon}{\left(M + \frac{K}{a^2}\right)} = \frac{g\sin\varepsilon}{\left(1 + \frac{K}{Ma^2}\right)}$$

Gdyby walec się ślizgał bez tarcia to byłoby $\frac{d^2 s}{dt^2} = g\sin\varepsilon$

Ten przykład dobrze pokazuje praktyczność równań Lagrange'a. Według zasady prac przygotowanych dla systemu punktów byłoby to nadzwyczaj uciążliwe [illegible]. Można by chyba postąpić według zasad dla ruchu ciał sztywnych:

Siły: składowa $Mg\sin\varepsilon$ i tarcie R, które wywiera moment Ra

$$+Mg\sin\varepsilon - R = +M\frac{d^2 s}{dt^2}$$

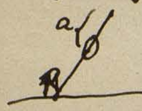
$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Ra \qquad s = -a\varphi$$

$$R = \frac{K}{a}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{K}{a}\frac{aMg\sin\varepsilon}{(K + Ma^2)}$$

$$a\,Mg\sin\varepsilon = (K + Ma^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$ więc to samo jak u góry.

Inny przykład: Ciało na śliskiej podstawie ⟷ na szorstkiej podstawie

wychylone z pozycji równowagi niestałej.



$$T = \frac{1}{2} K_R \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(K_0 + a^2 M)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$



$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} K_0 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad v_0 = a\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi$$

$$= \frac{1}{2}(K_0 + M\sin^2\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Dla walca nie idealnie nastąpi ślizganie w razie jeżeli

siła styczna $R > P\alpha = \alpha Mg\cos\varepsilon$

więc jeżeli
$$\frac{Mg\sin\varepsilon}{1+\frac{Ma^2}{K}} > \alpha Mg\cos\varepsilon$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon > \alpha\left(1+\frac{Ma^2}{K}\right)$$ dla walca $K=\frac{Ma^2}{2}$

więc jeżeli: $\operatorname{tg}\varepsilon \geqq 3\alpha$ następuje ślizganie

Jeżeli ślizganie to ruch postępowy i obrotowy nie są już związane

równaniem $s = a\varphi$; stąd zatem układ równań:

$$R = \alpha Mg\cos\varepsilon$$
$$M\frac{d^2s}{dt^2} = Mg\sin\varepsilon - \alpha Mg\cos\varepsilon$$
$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha a Mg\cos\varepsilon$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\varepsilon\left(1-\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\varepsilon}\right) = g(\sin\varepsilon - \alpha\cos\varepsilon)$$

najmniejsza w której $\operatorname{tg}\varepsilon = 3\alpha$

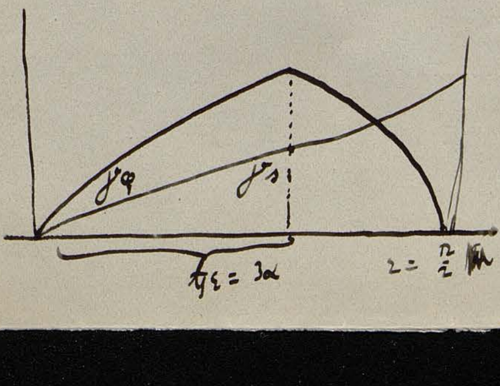
$\gamma_s = \frac{2}{3}g\sin\varepsilon$ ze ślizganiem

tosamo jako przypadek graniczny bez ślizgania dla tego kąta, więc przejście ciągłe

Przyspieszenie ruchu obrotowego:

z toczeniem: $\gamma_\varphi = \frac{Ma}{K}\frac{g\sin\varepsilon}{1+\frac{Ma^2}{K}} = \frac{Ma}{K}\frac{g\sin\varepsilon}{3}$

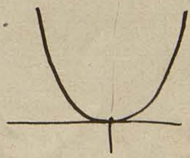
z ślizganiem: $\alpha\frac{Ma}{K}g\cos\varepsilon$



Inny przykład: Niech sznur działa ciężkości ale niech masa będzie rozdzielona ~~równo~~ jednostajnie względem ~~centr~~ na oś X. Można to zastąpić działaniem siły $Y = \gamma \frac{dx}{ds}$, co wstawimy do naszych równań:

$$\lambda \frac{dx}{ds} = c$$

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = \gamma \frac{dx}{ds} \qquad \lambda \frac{dy}{ds} = \gamma x + \cancel{b}$$

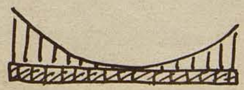


$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{c} x$$

$$y = \frac{\gamma}{2c} x^2 + \cancel{\text{const}}$$

Parabola

N. p. most:



jeśli uwzględniamy tylko ciężar dolnej części.

$$2\int \operatorname{tg}\frac{\delta\varphi}{2} = N\, ds$$

$$\frac{S}{R} = N$$

$$\frac{S^2}{R} = NS$$

$$\frac{v^2}{R} =$$

$$\frac{ds}{dt} \sim S$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} \cancel{\propto \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{ds} S} = T S$$

$$= \cancel{\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt} = S \frac{dS}{dt}}$$

Mamy zaś: $R = \frac{ds}{d\varphi}$ $\qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}$

~~$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx^2}{ds^2} \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) =$~~

~~$\varphi = \arccos \frac{dy}{ds}$~~

$$\frac{1}{R} = \frac{dx^2}{ds^2}\left[\frac{d^2y}{dx\,ds} - \frac{dy\, d^2x}{ds\, dx^2}\right] = \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}$$

Tak geometrycznie:

Tu otrzymujemy zaś

$$\frac{\lambda}{R} = Y \frac{dx}{ds}$$

Z drugiej strony z ogólnych równań:

$$\frac{d\lambda}{ds}\frac{dx}{ds} + \lambda \frac{d^2x}{ds^2} = X \quad \Big| \; \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\lambda}{ds}\frac{dy}{ds} + \lambda \frac{d^2y}{ds^2} = Y \quad \Big| \; \frac{dy}{ds}$$

$$— \; — \quad — \quad = Z \quad \Big| \; 1$$

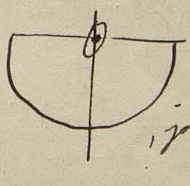
$$\frac{d\lambda}{ds} + \lambda\Big[\;\underset{=0}{—}\;\Big] = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

$$\lambda = \int (X\,dx + \dots)\,ds = U + \text{const}$$ ~~jeśli U is w.~~

więc tam: $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$

$$\frac{1}{R} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial y}}{U + \text{const}}\frac{dx}{ds}$$

N. p. jeśli chcemy nić w kształcie koła



, jakie muszą działać siły? $\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{r}$

$$\frac{1}{r} = -\frac{y}{r}\frac{1}{U}\frac{dU}{dy}$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{dU}{U}$$

$$\log\frac{1}{y} = \log U + \text{const}$$

$\rightarrow$ $U = \frac{a}{y}$

$Y = -\frac{a}{y^2}$

Naturalnie nie do wszystkich, bo w bliskości $y=0$: $Y=\infty$, więc także z tego wydaje się tam ponownie

Nić na którą działają siły ~~tylko w kierunku Y~~ rozdzielone wzdłuż nici nierozciągliwej, więc ~~$U = f(y)$~~

$\delta U = 0$ ~~$U = \int\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)ds$~~ To samo także ze zasady prac przygotowanych

gdzie X, Y, Z są siły pro elementu długości

więc:

~~$\int X d\delta x + Y d\delta y + Z d\delta z + (X dx + \ldots) d\delta s = 0$~~ $\delta U = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$

$$\int(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,ds + \lambda\,\delta ds = 0 \qquad \delta\int ds = 0$$

↑ To trzeba dodać bo warunek nierozciągliwości uwzględnia się w ten sposób (Lagrange mnożniki)

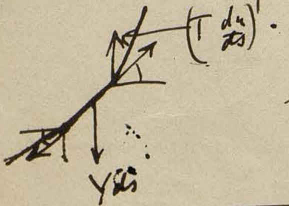
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\delta ds = \left(\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \ldots\right)$$

$$\int \lambda \frac{dx}{ds}\,d\delta x = \delta x\,\lambda\frac{dx}{ds} - \int \delta x \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)$$

$$\int\left\{\left[X - \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x + \ldots\right\}ds = 0 \quad \text{więc:} \quad \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) = X, \quad \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right) = Y$$

Do tych samych równań można dojść i bezpośrednio



z czego wynika że $\lambda = T$ = naprężenie nici

Jeżeli n. p. $X = [illegible] = 0$ ~~$Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} =$~~

$$\lambda\frac{dx}{ds} = c \qquad \frac{d\lambda}{ds}\frac{dy}{ds} + \lambda\frac{d^2y}{ds^2} = Y$$

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right) = Y = \qquad \frac{d\lambda}{ds}\frac{dx}{ds} + \lambda\frac{d^2x}{ds^2} = 0$$

Także na wstęp równ. Lagr. z zasady Hamiltona:

$$\delta\int(L-U)\,dt = \int\frac{\partial}{\partial p}(L-U)\,dt\;\delta p + \underbrace{\int\frac{\partial}{\partial \dot p}(L-U)\,dt\;\delta \dot p}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot p}(L-U)\,\delta p - \int\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot p}(L-U)\,\delta p\,dt$$

$$= 0$$

$$x = g\frac{t^2}{2} + \sum A_k \sin\frac{kt\pi}{t_2}$$

$$v = gt + \sum kA_k \cos\frac{kt\pi}{t_2}$$

$$\int\frac{v^2}{2}\,dt = \frac{g^2t^3}{2} + \not{4}g\underbrace{\int t\cos\frac{kt\pi}{t_2}\,dt} + \frac{1}{2}\int\cos^2\frac{kt\pi}{t_2}$$

$$\underbrace{t\sin - \int\sin}$$

$$+2gA_k \qquad\qquad g$$

$$U = -mgx$$

$$\int\left(m\frac{v^2}{2} + mgx\right)dt = m\; g^2\frac{t^3}{6} + 2g\sum A_k + \frac{1}{2}\sum A^2\int\ldots + g^2\frac{t^3}{6}\;\cancel{2g\sum A_k}$$

Równ. Lagrangea także bezpośrednio z $\qquad \varphi(x_1\,x_2\ldots\;)=0$

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdots = 0 \;\Big|\; \frac{\partial x}{\partial p}$$

$$\underbrace{m_1\ddot x_1\frac{\partial x_1}{\partial p} + m_2\ddot x_2\frac{\partial x_2}{\partial p} + \cdots} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p} + \cdots\right) + \cancel{\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p}\cdots\right) + \cdots}$$

$$\sum\left[\frac{d}{dt}\left(m_1\dot x_1\frac{\partial x_1}{\partial p}\right) - m_1\dot x_1\frac{\partial \dot x_1}{\partial p}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\dot x_1\frac{\partial \dot x_1}{\partial \dot p}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot p}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial p}$$

$$x_1 = f(p\,q\,\ldots)$$

$$\dot x_1 = \frac{\partial x}{\partial p}\dot p + \frac{\partial x}{\partial q}\dot q + \cdots$$

$$\frac{\partial \dot x_1}{\partial \dot p} = \frac{\partial x}{\partial p}$$

Ruch paraboliczny w porównaniu z ruchem po [illegible]



$x = ct \qquad x^2 \frac{g}{2} = c^2 y$

$y = g\frac{t^2}{2}$

$I = c^2 + g^2 t^2$

$$\int \left(\frac{c^2 + g^2 t^2}{2} + g^2 \frac{t^2}{2} \right) dt = \frac{c^2 t}{2} + g^2 \frac{t^3}{3} = \frac{cx}{2} + g^2 \frac{x^3}{3c^3}$$

$y_2 = x_2^2 \frac{g}{2c^2}$

$x = \alpha t$

$y = \beta t$

$$\int \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + g\beta t \right) dt = (\alpha^2 + \beta^2) t + g\beta \frac{t^2}{2} = \frac{\left(c^2 + \frac{x^2 g^2}{4c^2}\right)}{2} \frac{x}{c} + \frac{g^2 x}{2c} \cdot \frac{x}{c}$$

$\alpha = c \qquad \beta = \frac{x^2 g}{2c^2} \frac{c}{x} = \frac{xg}{2c}$

$$= \frac{cx}{2} + \frac{x^3 g^2}{8c^3} + \frac{g^2 x^3}{2c^3}$$

$$= \frac{cx}{2} + \frac{5x^3 g^2}{8c^3}$$

Mo



Naturalnie także kształt drogi dicta w ten sam sposób $r = g\frac{t_3^2}{4}$ 53

N. p. $x = g\frac{t^2}{2}$ $y = \sin g\frac{t^2 \pi}{2x_2}$ $L = \pi g \frac{t_3}{4}$ $U = g\frac{t_3^2}{4}(1-\cos\frac{t}{t_3})$

$\dot{x} = gt$ $\dot{y} = \frac{\pi g t}{x_2}\cos\frac{g\pi t^2}{2x_2}$ $\pi^2 g^2 \frac{t_3^3}{96} - g^2\frac{t_3^3}{4}$

$\int\left[\frac{g^2t^2}{2} + \frac{\pi^2 g^2 t^4}{2x_2^2}\cos^2\frac{g\pi t^2}{2x_2}\right]dt = \ldots$ To się samo przez się rozumie że to będzie

większe od $\int\frac{\dot{y}^2}{2}dt$

Naturalnie że i z tej zasady można znów znaleźć ogólne równania ruchu (Ale także tutaj trzeba uważać żeby tylko niezależnie zmiennych używać)

N. p. punkt swobodny:

$$\delta\int\left[(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\frac{m}{2} - U\right]dt = 0$$

$$= \int\left[(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z})m - \delta U\right]dt = m(\delta x\,\dot{x} + \delta y\,\dot{y} + \delta z\,\dot{z})\Big|_{A_1}^{A_2} - \int(\ddot{x}\,\delta x \ldots)m + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x \ldots$$

$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc.

W razie równowagi mamy: $\delta U = 0$ A jak n. p. $\delta U > 0$?

Wiz. albo Minim (stała równowaga)

Max (niestała ")

Minimax (stało-niestała ")

albo wogóle niezmiennie indiff (obojętna)

Zasada Hamiltona

do wyprowadzania przykładów zwykle mniej odpowiednie jak tamte równania.

Jej znaczenie jest:

Punkt będzie odbywał pewną drogę pod działaniem pewnych sił. N. p. z punktu P_1 do P_2 w przeciągu czasu $(t_2 - t_1)$; ta droga wyróżnia się od wszystkich innych



możliwych między temi punktami tem że:

Wartość całki $\int_{t_1}^{t_2}(L-U)\,dt$ jest najmniejsza.

N. p. spad wolny



$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} \qquad U = -mgx$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + mgx\right)dt = 0 = \delta\int\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + gx\right)dt = \int(\dot{x}\,\delta\dot{x} + g\,\delta x)\,dt$$

$$= -\int(\ddot{x}\,\delta x - g\,\delta x)\,dt = 0$$

$$\ddot{x} = g \qquad \dot{x} = gt \qquad x = \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{Wartość całki} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{g^2t^2}{2} + g^2\frac{t^2}{2}\right)dt = \frac{g^2}{3}(t_2^3 - t_1^3)$$

jeżeli $t_1 = 0$: $= \frac{g^2 t_2^3}{3}$

Inny ruch który się zgadza z warunkami $t=0 \quad x=0$; $t=t_2 \quad x=x_2$

$$x = ct \qquad \dot{x} = c = \frac{g t_2^2}{2t_2} = \frac{gt_2}{2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{c^2}{2} + gct\right)dt = \frac{c^2 t}{2} + gc\frac{t^2}{2} = \frac{g^2t^3}{8} + \frac{g^2 t^3}{4} = \frac{3}{8}g^2 t_2^3$$

a to zawsze większe niż tamto

Wahadło stożkowe

$$C = g a \cos\theta + \frac{1}{2} \frac{c}{a^2 \sin^2\theta}$$

Ignorable coord. $\frac{\partial H}{\partial q}=0$

Jeśli p_1 nie wchodzi w L a δp oznacza przesunięcie δx

$\frac{\partial L}{\partial p_1}=0$ całe

$$\frac{\partial T}{\partial \dot p_1} = \text{const} \qquad p_1 = x_1$$

$$T=\sum \frac{m}{2}\left(\dot x_k^2+\dot y_k^2+\dot z_k^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot x_1} = \sum m_k\left[\dot x_k \left(\frac{\partial \dot x_k}{\partial \dot x_1}\right) + \dot y_k \frac{\partial \dot y_k}{\partial \dot x_1} + -\right]$$

Ogólnie $\frac{\partial \dot x}{\partial \dot p} = \frac{\partial x}{\partial p}$ etc.

$$= \sum m_k\left[\dot x_k \frac{\partial x_k}{\partial p_1} + \dot y_k \frac{\partial y_k}{\partial p_1} + -\right]$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_1} = 1 \qquad \frac{\partial y_k}{\partial p_1} = 0 \quad \dots \qquad = \sum m_k \dot x_k$$

więc moment [illegible]

Podobnie jeśli $p_1 = \varphi_1$

$$x_k = r_k \cos\varphi_k$$

$$y_k = r_k \sin\varphi_k \qquad \text{oś} = z$$

$$d\varphi_k = d\varphi_1$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial p_1} = \frac{\partial x_k}{\partial \varphi} = -r_k \sin\varphi_k = -y_k$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial p_1} = \frac{\partial y_k}{\partial \varphi} = r_k \cos\varphi_k = x_k$$

$$\frac{\partial z}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot \varphi_1} = \text{const} = \sum m_k\left[-\dot x_k y_k + \dot y_k x_k\right]$$

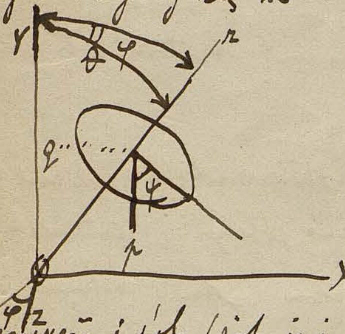
Jeśli system może być obracany jako sztywny koło jakiejś osi nie zmieniając przekroju [illegible]

Zwykły bąk ma 5 (stopni) rzędy wolności jeśli rusza się po płaszczyźnie

Jeśli ma przy końcu osi wydrążenie, można go ~~postawić~~ osadzić na sznurek i będzie chodził wzdłuż sznurka — wtedy ma 4 ~~st.~~ wolności

Wreszcie jeśli koniec osi w łożysku stałem to ma 3 wolności.

Ograniczymy się na bliższe zbadanie tego przykładu, ~~który~~ ponieważ najłatwiejszy.



Właściwie moglibyśmy teraz wyrazić $p\,q\,r$ za pomocą kątów $\varphi\ \psi\ \vartheta$ i wstawić to do równań Eulera.

Ale tutaj wygodniej zaraz wyjść ze zasad zachowania energii i pól (jak już często w prostych przykładach).

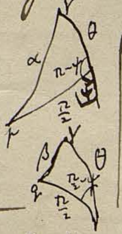
$A = B$, ale A, B rachujemy ~~wzgl.~~ dla osi przechodzących przez O (równoległych do p, q), C;

$\int Mgl \sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial t} = -Mgl\cos\theta$

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + qr(C-A) &= P \quad (= Mgl\sin\theta\sin\psi)\\ A\frac{dq}{dt} + pr(A-C) &= Q \quad (= Mgl\sin\theta\cos\psi)\\ C\frac{dr}{dt} &= R \end{aligned}\right\}$$

Ponieważ ciało (rotacyjne) obrotowe. Ciężkość wywiera moment P i Q ale $R=0$

zatem $r =$ stałe! ~~$\frac{\partial\psi}{\partial t} =$ stałe~~



$\cos\alpha = \cos\theta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}\cos(\pi-\psi)$

$p = \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\psi - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\theta\cos\psi$

$q = +\frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\psi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\theta\sin\psi$ ($\cos\beta$)

$r = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\theta$

Zamiast dwóch innych równań wprost użyjemy owe dwie zasady:

E = Praca ciężkości = $c - Mgl\cos\vartheta$

$E = A(p^2+q^2) + Cr^2$

$A(p^2+q^2) = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta$

bo mamy całkowity obrót $= p^2+q^2+r^2 =$



składowe prostokątnie $= r^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2$

99 Zatem łącząc stałe:

$$\frac{A}{2}\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta\right] = C - Mgl\cos\vartheta$$

‖ A jeżeli przyjmiemy że w początku $\frac{d\vartheta}{dt}=0=\frac{d\varphi}{dt}=0$:

$$A\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta\right] = 2Mgl(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)$$

$A^2(p^2+q^2)+C^2r^2=-AMgl\cos\vartheta$ const

Zachowanie pól:

Koło osi Oz nie działa żaden moment siły, zatem moment obrotowy koło niej jest stały. Składa on się z

$$Cr\cos\vartheta + \overbrace{A\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\vartheta}^{=Ap\cos\alpha+Bq\cos\beta} = \text{stała}$$

{ bo: odrzuciwszy z wystawy sobie krążek nieruchomy; wtedy p można położyć (dowolnie) w kierunek przecięcia ($\psi=0$) ⊥ Oz, zatem wydziela rachunku tylko moment $Ap = A\frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta$, a z niego tylko część pomnożona przez $\sin\vartheta$ jest ⊥

A_p

Więc:

$$Cr_0(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta) = A\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\vartheta$$ } [illegible]

Teraz ograniczenie: $\vartheta-\vartheta_0$ małe $=\alpha$ $\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=+\frac{d\alpha}{dt}$

więc: $\cos\vartheta_0-\cos\vartheta = -2\sin\frac{\vartheta_0+\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta_0-\vartheta}{2} = \alpha\sin\vartheta_0$

$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$

Zatem:

$$Cr_0\alpha = A\frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta_0$$

$$A\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta_0\right] = 2Mgl\,\alpha\sin\vartheta_0$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = +\frac{2Mgl}{A}\alpha\sin\vartheta_0 - \left(\frac{Cr_0\alpha}{A}\right)^2$$

przypadek szczególny: $\alpha\frac{C^2r^2}{A} = 2Mgl\sin\vartheta_0$ $\qquad \frac{d\alpha}{dt}=0$

$\frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2Mgl\,\alpha\sin\vartheta_0}{A}}$ =

skąd dla skrócenia:

$\frac{Cr_0}{A}=\lambda$ ‖ $\beta=\frac{Mgl\,A\sin\vartheta_0}{C^2r_0^2}$

$\frac{Mgl}{A}\sin\vartheta_0 = \lambda^2\beta$

$$\pm \frac{d\alpha}{\sqrt{2\beta\alpha-\alpha^2}} = \lambda\, dt \qquad \frac{1}{\beta}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}} = \ldots$$

$$\lambda t = \text{const} \pm \arccos \frac{\beta-\alpha}{\beta}$$

$$\alpha = \beta - \beta\cos\lambda t$$

$$\vartheta = \underbrace{(\vartheta_0+\beta)}_{=\Theta} - \beta\cos\lambda t$$

Zatem ϑ kołysze się między ϑ_0 i $\vartheta_0 + \frac{Mgl\,A}{C^2 r_0^2}$

$$A\frac{d\varphi}{dt}\sin\vartheta_0 = C r_0\,\beta(1-\cos\lambda t)$$

$$d\varphi = \underbrace{\frac{C r_0}{A}}_{\lambda}\frac{\beta}{\sin\vartheta_0}(1-\cos\lambda t)\,dt$$

Kowalewska $A = B = 2C$

Hopkinson



Ziemi precessya 25800 23.5°

Nutacya 9.24'' 18.6 lat

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\lambda\beta}{\sin\vartheta_0}\left(t - \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right) = \Phi - \frac{\beta\sin\lambda t}{\sin\vartheta_0}$$

$$\Phi = \varphi_0 + \frac{\lambda\beta}{\sin\vartheta_0}\,t$$

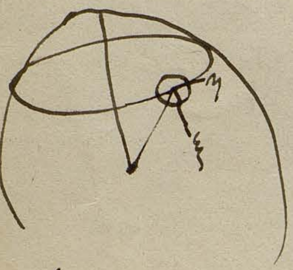
Więc oś kołysze się koło tak zw. bieguna średniego który opisuje ruch jednostajny Θ Φ

Nutacya $\lambda = \frac{C r_0}{A}$ ||| $T = \frac{2\pi A}{C r_0}$

Precessya okres $T = \frac{2\pi\, C r_0}{Mgl}$

Amplituda nutacji $\frac{Mgl\,A\sin\vartheta_0}{C^2 r_0^2}$

względem Φ i Θ mamy



$$\vartheta - \Theta = -\beta\cos\lambda t$$

$$\varphi - \Phi = -\frac{\beta\sin\lambda t}{\sin\vartheta_0}$$

$$\xi = (\vartheta-\theta)\rho \qquad \eta = (\Phi-\varphi)\sin\vartheta_0 = \beta\sin\lambda t$$

zatem ~~opisuje~~ oś opisuje koło małe (tem mniejsze im większe C, r_0) koło bieguna średniego. Precessya, Nutacya. Okres kołysania. Ruch ziemi. Żyroskop.

Na tem kończymy mechanikę ciał sztywnych.

Właściwie te zasady które znamy, wystarczą do rozwiązania wszystkich zadań. Ale w niektórych wypadkach korzystniej posługiwać się innymi formami

Równania Lagrange'a i zasada Hamiltona

$$\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \sum\left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \sum(\quad) = 0$$

Lagrange podał ~~tą~~ tę samą zasadę ruchu w innej formie, która niesłychanie w tym wypadku jest użyteczna jeśli spółrzędne nie są prostokątne x, y, z. Potrzeba tylko jakieś ogólne p q r tylko wyrazić wyraz dla energji kinetycznej E w owych ogólnych p q r .... Przy tem zważić trzeba że E wogóle zależy od $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ [ponieważ jest $= \sum(\;)^2 + (\;)^2 + (\;)^2$]. Mamy jednak

tylko w razie warunków holonomicznych!

$p = \varphi_1(x_1, x_2 \cdots y_1 y_2 \cdots)$ etc. i odwrotnie $x_1 = f_1(p, q, r \cdots)$

$q = \varphi_2(x_1\ x_2 \cdots$ —— $y_1 = f_2($ —— $)$

y —

zakładamy, że czas t nie wchodzi w te funkcje, więc że zależność jest niezmienna.

Więc $\frac{dx}{dt}$ a zatem i E będzie funkcyą pochodnych $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}$ etc. (jednorodną drugiego rzędu względem pochodnych) i położenia punktu p, q, r.

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) - \frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt}$$

~~$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \cdots = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \cdots$~~

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial p}\delta p + \frac{\partial x}{\partial q}\delta q + \cdots$$

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \cdots\right) = \sum X\delta x + \cdots$$

$$= \sum m\left(\frac{d\dot x}{dt}\delta x + \cdots\right) = \sum m\left[\left(\frac{d\dot x}{dt}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{d\dot y}{dt}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots\right)\delta p + \left(\frac{d\dot x}{dt}\frac{\partial x}{\partial q} + \cdots\right)\delta q + \cdots\right]$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right) - \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial p}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}(\dot{x}^2)$$

$$\left\| \quad \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \dots \right.$$ 9f

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial x}{\partial p}$$

$$~~\sum m \left[\frac{d}{dt}\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right.~~ = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(\dot{x}^2)}{\partial \dot{p}}\right] - \frac{\partial(\dot{x})^2}{\partial p}\right\}$$

$$\overbrace{-X\frac{\partial x}{\partial p} - Y\frac{\partial y}{\partial p} -}^{P}$$

$$\sum \frac{m}{2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(\dot{x}^2)}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial(\dot{y}^2)}{\partial \dot{p}} + \frac{\partial(\dot{z}^2)}{\partial \dot{p}}\right] - \frac{\partial(\dot{x})^2}{\partial p} + \dots\right\}\delta p + \{\quad\}\delta q + \dots +$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} - P = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} - Q = 0 \end{cases}$$

etc.

Jeżeli $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc

to $\sum X\delta x + Y\delta y \sim = \delta U$

$= \frac{\partial U}{\partial p}\delta p + \dots$

więc wtedy $P = -\frac{\partial U}{\partial p}$ etc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{\partial U}{\partial p} \\ \text{etc} \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}$ nazywamy momentem ruchu odpowiadającym p

można także napisać to w formie $L - U = H =$ kin. pot.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

Zanim przejdziemy do objaśnień i zastosowań ~~przejdziemy~~ poznamy najpierw jeszcze inną formę tych samych równań: Hamiltona

ponieważ $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \dots$

L jak powiedzieliśmy $= \sum \frac{m}{2}\left(a_{11}\dot{p}^2 + a_{22}\dot{q}^2 + \dots + a_{12}\dot{p}\dot{q} + \dots\right)$

gdzie wielkości a są funkcje $(p\ q \dots)$

Zmiana L podczas ruchu wskutek zmiany jednej z współrzędnych będzie zatem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta\dot{p} + \frac{\partial L}{\partial p}\delta p = \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\frac{d}{dt}(\delta p) = \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)\cdot\delta p$$

Zatem zmiana całkowita przy przesunięciach w kierunkach p q r

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p}\right]\delta p - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p\right) -$$

$$- \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]\delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \ldots \qquad = \delta L$$

A w skutek powyższych równań

$$\delta L = \delta U - \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\delta p\right) + \ldots$$

$$\delta(L - U) = \frac{d}{dt}\left[\sum \ldots\right.$$

A całkując to między jakiemiś bądź granicami

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(L-U)\,dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)_2 \delta p_2 - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)_1 \delta p_1 + \ldots\ldots$$

Jeżeli teraz waryacye tak urządzimy że za czasu t_1 i t_2 wszystkie $\delta = 0$

to $\delta \int_{t_1}^{t_2} (L-U)\,dt = 0$

Wartość tej całki zależna od p q r etc., jeżeli zatem zmienimy p q r dowolnie to i ona będzie się zmieniała — ale zmieniamy je tak że w dwuch momentach t_1 i t_2 ~~na które~~ ~~założony~~ (uważany) jako graniczne wartości czasu system był w początkowym stanie. Z wszystkich możliwych ruchów systemu odbędzie gdzie owa całka nie zostaje zmieniona przez takie dowolne zmiany.

Trudno to jest do zrozumienia ~~z takiego~~ ale analityczna forma bardzo zwięzła i niema w niej żadnej wzmianki od spółrzędnych.

Przykłady

~~Wahadło stożkowe~~ Punkt swobodny

$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ ~~U = mgz~~

$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$

$L = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_{tang}$

Wahadło ~~stożkowe~~; ~~stw~~ wprowadzić $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$

ale tego wyrazu nie wolno użyć w ten sam sposób, bo x i y nie są niezależne. $x^2+y^2=a^2$

Jeśli chce się użyć n.p. x jako ~~niezależną~~

$x\dot{x}+y\dot{y}=0$ $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = \frac{m\dot{x}^2}{2}\frac{a^2}{a^2-x^2}$ $U = mgy$

$\frac{dL}{d\dot{x}} = m\dot{x}\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$ ‖ ~~$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left[1+\frac{2x}{y}\right] = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left[1+\frac{2x}{a^2-x^2}\right]$~~

$= m\dot{x}\left[1+\frac{x^2}{a^2-x^2}\right]$ $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{m}{4}\dot{x}^2\frac{2x\,a^2}{(a^2-x^2)^2}$

$= m\dot{x}\frac{a^2}{a^2-x^2}$

Zaś teraz: $\frac{dU}{dx} = mg\frac{dy}{dx}$

$m\ddot{x}\frac{a^2}{a^2-x^2} + \frac{2m\dot{x}^2a^2x}{(a^2-x^2)^2} - ~~[\ldots]~~ - \frac{mx\dot{x}^2a^2}{(a^2-x^2)^2} = m\ddot{x}\frac{a}{a^2-x^2} + \frac{ma^2x\dot{x}^2}{(a^2-x^2)^2} =$

$= ma\frac{d}{dx}\frac{\dot{x}}{\sqrt{a^2-x^2}} = mgx$

$= mg\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ etc.

~~$\frac{mx\dot{x}^2}{(a^2-x^2)^2}$ $2a^2x$~~

Naturalnie że wiele stosowniej wprowadzić jako daną współrzędną kątową:

$a^2-x^2 = a^2\cos^2\varphi$

$L = \frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2$ $U = \mp mga\cos\varphi$

$x = a\sin\varphi$

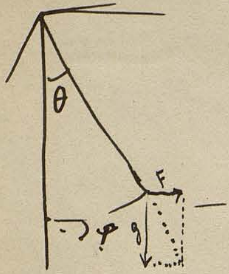
$\dot{x} = a\cos\varphi\,\dot{\varphi}$

$\ddot{x} = -a\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + a\cos\varphi\,\ddot{\varphi}$

$ma^2\ddot{\varphi} = mga\sin\varphi$

$\frac{-\dot{\varphi}^2\sin\varphi+\cos\varphi\,\ddot{\varphi}}{\cos\varphi} + \frac{\sin\varphi\,\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi}\dot{\varphi}^2 = \sin\varphi$

Wahadło stożkowe



$$L = \frac{m}{2}\left(a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \qquad U = mga\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = a^2\dot\theta m \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m a^2\sin^2\theta\,\dot\varphi$$

$$m a^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - m a^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2mga\sin\theta \qquad \text{I}$$

$$m a^2\left[\sin^2\theta\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] = 0 \qquad \text{II}$$

~~Pierwsze równanie i stąd~~

$$\sin\theta\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$\frac{\frac{d^2\varphi}{dt^2}}{\frac{d\varphi}{dt}} + 2\,\frac{\frac{d(\sin\theta)}{dt}}{\sin\theta} = 0$$

$$\frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} = A\sin^2\theta$$

T. j. zasada pól: $a^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = \text{stała} = c$

A wstawiając to w pierwsze równanie otrzymamy zasadę energii przez całkowanie i t. d.

mianowicie: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{a^2\sin^2\theta}$

n. p. w przybliżeniu $\frac{d\theta}{dt} = 0$

$a\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g$

$a\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g\,tg\,\theta$

$\frac{F}{g} = tg\,\theta$

więc: $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{c^2}{a^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta$

$= \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ dla małych θ pominąć; cos θ zamienić; $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{a}\theta^2 = \text{const}$ zwykłe

przez całkowanie $\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{2a^4}\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{g}{a}\cos\theta + \text{const} = 0$ } Z tego i ze zasady pól otrzymałby się równanie energii wyższe c

Z czego: $dt = \frac{d\theta}{f(\theta)}$ równanie czasu } Całki eliptyczne

a z drugiego: $d\varphi = \frac{c\,d\theta}{a^2\sin^2\theta\,f(\theta)}$ równanie toru

N. p. stożkowe jeżeli $\frac{d\theta}{dt} = 0$ więc $a\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{a\sin^2\theta} = \frac{1}{a}\,a^2\sqrt{\frac{2g}{a\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2ga}{\cos\theta}}$

bo centrif. $= a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos\theta = g\cos\theta$

$tg\,\theta = \frac{a\sin\theta\,\dot\varphi^2}{g}$

$\cos\theta = \frac{g}{a\dot\varphi^2}$

$\dot\varphi = \sqrt{\frac{g}{a\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{h}}$ — $\dot\varphi$ nie może spaść poniżej

$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ — T nie mniej niż $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

39

1). Po gładkiej [idealnie] krzywej porusza się punkt materyalny [z prędkością początkową daną ale] bez sił zewnętrznych

Jaki jest ruch, jakie siły będzie wywierał ..

2). Ciało [stałe] ciężkie ślizga się po równi pochyłej z tarciem

3). Tak samo po środku koła z tarciem (małe wychylenia)

$$\alpha m \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\varphi + \alpha\left(mg + a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a}\varphi + \alpha$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \frac{a}{g}\alpha$$ naturalnie tylko dopóki $\varphi > \alpha$

4). Wahadło z oporem ośrodka

Jaki opór że kolejne amplitudy: $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} \ldots$

powstaje odkształcenie; jaka zmiana okresu?

5). Po gładkiej krzywej, z ciężkością, z początkową prędkością, [illegible] w $X = c$

jaki kształt aby $T = 0$

$$m\frac{dV}{dt} = F_1 = mg\cos\varphi$$

$$-\frac{g\,m}{\sqrt{y_0 - y}}\frac{dy}{dt} = mg\cos\varphi$$

Odpowiedź parabola a na innych krzywych odbić [illegible] krzywa [illegible] nie parabola odpowiedni



$$V^2 = mg(y_0 - y)$$

$$V = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Więc $T = 0$ jeżeli [illegible]

$$T = mg\cos\varphi + \frac{mV^2}{R}$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{\cos\varphi}{2(y_0 - y)}$$

$T = 0$ gdy $\frac{1}{R} = -\cos\varphi\frac{g}{V^2}$

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{-1}{2(y_0 - y)} = \frac{1}{2y}$$

$y_0 = 0$

$y = \sqrt{\ }$

dla dowolnych wychyleń:

6). Wahadło: Jakie jest naprężenie nitki w funkcji φ



$$T = mg\cos\varphi + ma\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

~~$\varphi = \varphi_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$~~

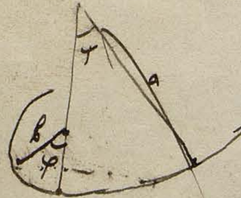
~~$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \frac{g}{l} \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$~~

$$\frac{m}{2}\left[a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = mga(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$2\cos\varphi_0 - \cos\varphi > 0$

$\cos\varphi < 2\cos\varphi_0$

$$T = mg\cos\varphi + 2mg(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = mg(2\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

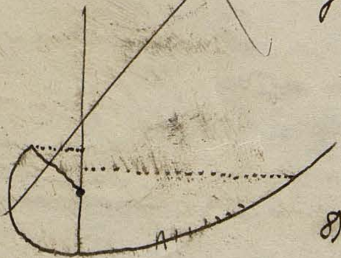


$$T = mg\cos\varphi + mb\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{m}{2}b^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mga(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$T = mg\left[\cos\varphi + \frac{2a}{b}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\right] = mg\left[\cos\varphi + \frac{2\Delta y}{b}\right]$$

$= 0$ jeśli $-\cos\varphi = \frac{2\Delta y}{b}$



7). Jaki okres ruchu czy izochroniczny?



8). Diz ich ; Lasso



9). Wahadło sferyczne dla małych wychyleń θ

10). Wahadło cykloidalne

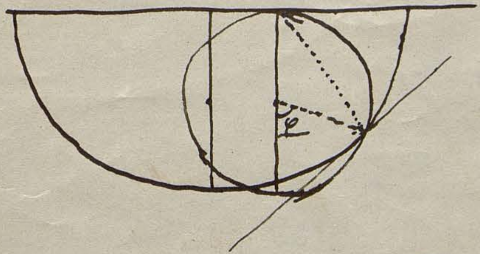
11). Krzywa taka żeby czas po cięciwie = czas po łuku (wychylenie [illegible])

12). Wahadło paraboliczne

13). Wahadło podwójne równoważne

1), Wahadło z oporem

2), Wahadło cykloidalne



$x = a(\varphi + \sin\varphi)$

$y = a(1 - \cos\varphi)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\psi = \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$ds = a\sqrt{\left[\sin^2\varphi + (1+\cos\varphi)^2\right]}\,d\varphi$$

$$= a\,d\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)} = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$s = 4a\sin\frac{\varphi}{2}$$

siła $mg\sin\psi = mg\sin\frac{\varphi}{2}$

$$-m\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{mg}{4a}s$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a}s$$

albo też z zasady zachow. energii

$$v = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{m}{2}\left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + gma(1-\cos\varphi) = \text{const} = gma(1-\cos\varphi_0)$$

$$2a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2ga\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{a\,d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{dt}{2}$$

3), Ruch po równi pochyłej . . . . .

4). " " z tarciem ciał stałych

$2px = y^2$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + m\left(\frac{d^2y}{dt^2} - g\right)\delta y = 0$$

$$\delta x = \frac{y\,\delta y}{p}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{y}{p}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{1}{p}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{y}{p}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) y\frac{\delta y}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 y\frac{\delta y}{p} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y - g = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + gy = \text{const}$$

$$\frac{y^2}{p^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + gy \qquad \frac{dy}{dt}$$

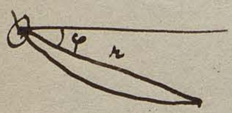


$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + U = C.$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\, t = \int \frac{ds}{\sqrt{C-U}}$$

1) Taka krzywa że czas taki sam jak po siecznej

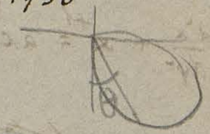
$$\frac{ds}{\sqrt{c - r\sin\varphi}} = \frac{\;\;dr}{\sqrt{2g\sin\varphi}} - \frac{\sin\varphi \, ds\, \sqrt{2r}}{\sqrt{g\sin\varphi}}$$

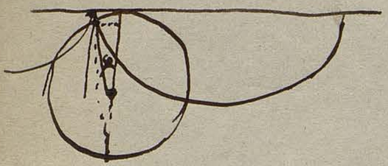


$$t = \sqrt{\frac{2r}{g\sin\varphi}} = \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{c - r\sin\varphi}}$$

Euler 1736

$r^2 = A\sin 2\theta$





$$\begin{cases} y = a(1+\cos\varphi) \\ x = a(\varphi - \sin\varphi) \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2\left[\sin^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2\right] d\varphi^2$$

$$ds = d\varphi\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = d\varphi \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$s = a(1-\cos\frac{\varphi}{2}) = \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{s}{2a}$$

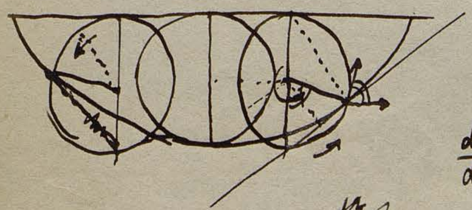
$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2\left(1-\frac{s}{2a}\right)^2$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + g\,a(1+\cos\varphi) = \text{const}$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2ga\left(1-\frac{s^2}{2a}\right) = c$$

jest liniowy

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{ds}{dt} = \sqrt{2ga}\;\frac{s}{\ldots}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = -\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{2a-y} = \frac{\sqrt{y(2a-y)}}{2a-y} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{ds}{dt} = \ldots y$$

$$v = \sqrt{2g(h-y)} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\frac{dy}{dt}\sqrt{[illegible]}$$

$$dt = dy\sqrt{\frac{r}{gy(h-y)}}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = a \cdot u^{n-2}$$

$$F = \frac{b}{u^n} \qquad r^2\frac{d\varphi}{dt} = c$$

$$a = \frac{b}{c^2}$$

$$u = c(1+x)$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x^{+1} = a c^{n-3}(1+x)^{n-2} = a c^{n-3}\,(1+(n-2)x)$$

~~$1+(2-n)\,a c^{n-3} = 0$~~

$$1 = a c^{n-3}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x(3-n) = 0$$

$$x = A e^{-\alpha\varphi} \qquad 3-n<0$$

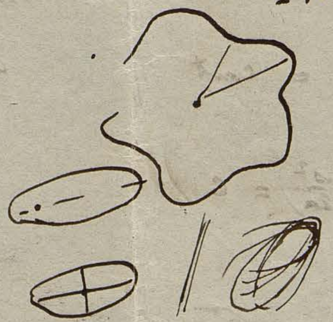
$$x = A \sin \alpha\varphi \qquad 3-n>0$$

$$\alpha = \sqrt{3-n}$$

$$r = \frac{1}{c(1+x)}$$

$$\Phi\sqrt{3-n} = \pi$$

$$\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{3-n}} \quad \text{(Newton!)}$$



jedyny

N.p. $n=2$ $\quad \Phi = \pi$

$n=-1$ $\quad \Phi = \frac{\pi}{2}$

tirage à part



$i +$

~~$b_1 i + b_2 j + b_3 k = (a_1+1)\, i + (a_2+1)\, j + (a_3+1)\, k$~~

$$(a_1+1)\, i + a_2 j + a_3 k = u$$
$$a_1 i + (a_2+1)\, j + a_3 k = b$$
$$a_1 i + a_2 j + (a_3+1)\, k = c$$

$$i = u - d \quad k$$
$$j = b - d$$
$$k = c - d = [i\, j]$$

$$[(u-d)(b-d)] = c - d$$

~~$c_1 - d_1 = (a_2 - d_2)(b_3 - d_3) - (a_3 - d_3)(b_2 - d_2) = a_2 b_3 - a_3 b_2$~~

$$[u\, b] - [d\, b] - [u\, d] + [d\, d] = c - d$$

$$c - [u\, b] = [(b-u)\, d] + d$$

$$S.(b-u)(c - [u\, b]) = S.(d\,(b-u))$$

$$[u\, b] + [(b-u)\, d] = c - d$$

$$c_1 - d_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 + d_2 [a_3 - b_3] + d_3 [b_2 - a_2]$$

$$d_1 + d_2 (a_3 - b_3) + d_3 (b_2 - a_2) = c_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3$$
$$d_2 + d_3 (a_1 - b_1) + d_1 (b_3 - a_3) = c_2 + a_1 b_3 - a_3 b_1$$
$$d_3 + d_1 (a_2 - b_2) + d_2 (b_1 - a_1) = c_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} (c_1 + a_3 b_2 - a_2 b_2) & (a_3 - b_3) & (b_2 - a_2) \\ (c_2 + \quad) & (a_1 - b_1) & (b_3 - a_3) \\ (c_3 + \quad) & (a_2 - b_2) & (b_1 - a_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_3 - b_3 & b_2 - a_2 \\ 1 & a_1 - b_1 & b_3 - a_3 \\ 1 & a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{vmatrix}} = \frac{\qquad}{-\Sigma (u-b)^2 - [u\, b]}$$

Ciało zawsze [illegible] drgającego ponowo; [illegible]

Ruch [illegible] $r = \alpha t + \beta$ [illegible] siła

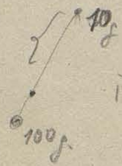
Kula 10g uderza z prędkością $\frac{1\,m}{s}$ w kawałek [illegible]



moment [illegible]

energia i moment [illegible]

Wahadło



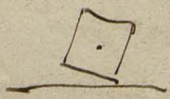
jak[illegible] długość aby okres = 1 sek.

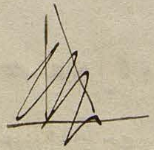
$\frac{1}{2}$ sek.



kula, walec

ds =







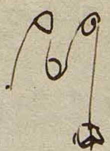
1 kg z wysokości 10 m

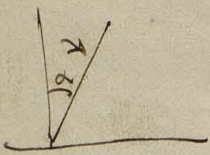
wydłuż. sprężyny 1 cm na 1 kg



Ziemia obracająca [illegible] kurczy się o $\frac{1}{1000}$ prom. Jak zmieni czas?

Kołowrót, bloki













obrót koło D

$A \frac{da}{dt} = 0 \qquad D \frac{dy}{dt} = B\omega \qquad A \frac{dz}{dt} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(K_x \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(K_y \frac{dy}{dt}\right) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(K_z \frac{dz}{dt}\right) = R$

$C\left(\frac{dy}{dt} - \left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right) = R\tau$ powrocić przy natężeniu krytycznym C niezmien

$\frac{dy}{dt} = \frac{R\tau}{C}$

oś równoległa przypadku w przestrzeni:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{R\tau}{m}}{\sqrt{(B\omega)^2 + (R\tau)^2}}$$

---

oś w ciele

$$\sin\alpha = \frac{\frac{R\tau}{C}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R\tau}{C}\right)^2}} = \frac{R\tau}{\sqrt{(C\omega)^2 + (R\tau)^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(K_x \frac{d\alpha}{dt}\right) = P \qquad \frac{d}{dt}\left(K_y \frac{d\beta}{dt}\right) = Q \qquad \frac{d}{dt}\left(K_z \frac{d\gamma}{dt}\right) = R$$

$$\frac{d}{dt} L = M \qquad \frac{d}{dt} \underbrace{\Sigma m \left[r \frac{dr}{dt}\right]}_{L} = \Sigma [r F]$$

$$L = \Sigma m [r v]$$
$$= \Sigma m [r [u r]]$$
$$= u \Sigma m r^2 - \Sigma m r (u r)$$

Jeśli $M = 0$ $\quad L = \text{const}$

ale z tego nie wynika że $\frac{d\alpha}{dt} = \text{const}$

$\frac{d\beta}{dt} = \text{const}$ bo właśnie w czasie obrotu także

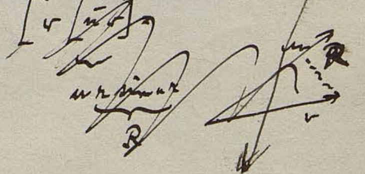
$\frac{d\gamma}{dt} = \ldots$ $K_x \; K_y \; K_z$ się zmieniają

Tylko jeśli oś obrotu wypadkowego taka że $K_x \; K_y \; K_z$ nie zmieniamy wtedy

a zatem jeśli wypadkowa oś obrotu w kierunku jednej z trzech osi głównych.

Impuls

$$L = \int M \, dt \qquad \text{kierunek}$$



Odśrodkowa $\quad \Sigma m \frac{v^2}{2} - \quad \Sigma m \omega \ldots -$

$$u\left(u\left[r[u r]\right]\right) = \left([u r][r u]\right)$$
$$= [u r]^2$$
$$= u^2 y^2$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$$

$$\Sigma m \left[r \frac{d^2 r}{dt^2}\right] = \Sigma [r F]$$

104

I. Przesunięcie A — A' i obrót tamże B — B'
C — C'

II. Jeśli nieskoń. małe

$$dv = dv_0 + [d\bar{u} . v]$$

III. $[d\bar{u}_1 v] + [d\bar{u}_2 v] = [(d\bar{u}_1 + d\bar{u}_2) v]$

IV. $d\bar{u}_1 = i\, du_1 + j\, du_2 + k\, du_3$ ($d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$)

$$[d\bar{u}_1 v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ du_1 & du_2 & du_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Statyka:

$$\sum (\mathfrak{F}\, dv) = 0$$

$$\sum(\mathfrak{F}\, dv_0) + \sum(\mathfrak{F}[d\bar{u} . v]) = 0$$

$$(\sum \mathfrak{F} . dv_0) \qquad \sum d\bar{u}\, [v\, \mathfrak{F}] = 0$$

$$(d\bar{u} \sum [v\, \mathfrak{F}]) = 0$$

$$\sum \mathfrak{F} = 0$$

przesuwając $v = v_1 + v'$, dowolny punkt $v = v_0 + [\bar{u}\, v]$ i wtedy

$v = v_0 + [\bar{u}\, v_1] + [\bar{u}\, v']$

zawsze tak dobrać aby było || $\bar{u}$

~~$[\bar{u}\, (v_0 + [\bar{u}\, v_1])] = 0$~~

~~$\bar{u}\, v_0 = -(\bar{u} [\bar{u}\, v_1])$~~

$\bar{u}\, v_0$

$$dv = (\delta x + z_k\, d\beta - y_k\, d\gamma)\, i + (\quad) j + (\quad) k$$

(δx_k, δy_k)

$$\sum \mathfrak{F} = \sum m \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{d^2 v_s}{dt^2} \sum m$$

$$\sum [v\, \mathfrak{F}] = \sum m \left[v\, \frac{d^2 v_k}{dt^2}\right]$$

$v_k = v_0 + v_n$

$$\sum \left[v_k \frac{d^2 v_k}{dt^2}\right] = \sum\left[v_0 \frac{d^2 v_0}{dt^2}\right] + \sum\left[v_0 \frac{d^2 v_n}{dt^2}\right] + \left[v_n \frac{d^2 v_0}{dt^2}\right] + \left[v_n \frac{d^2 v_n}{dt^2}\right]$$

$$\sum \left(\mathfrak{F} - m \frac{d^2 v}{dt^2}\right) dv = 0$$

$$\sum \left(\mathfrak{F}_k - m_k \frac{d^2 v_k}{dt^2}\right) = 0$$

$\sum \ldots$

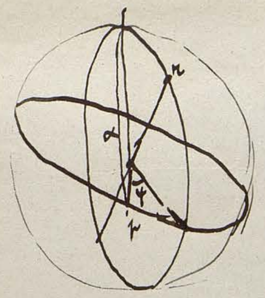
$$\sum [v\, \mathfrak{F}] = \frac{d}{dt} \sum m \left[v\, \frac{dv}{dt}\right]$$

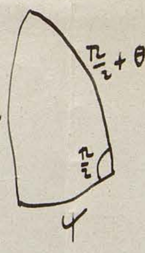
$v_k = v_0 + v_n$ ~~$\frac{d^2 v_k}{dt^2} = \frac{d^2 v_0}{dt^2} + \frac{d}{dt}[\bar{u}\, v_n]$~~

$\mathfrak{E} + \mathfrak{G} = 0$

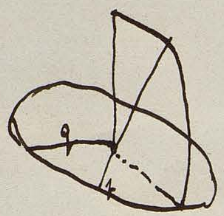
$\mathfrak{M} + [\mathfrak{G} v] = 0$ [illegible] $(\mathfrak{E}\mathfrak{M}) = -(\mathfrak{G}[\mathfrak{G} v]) = 0$

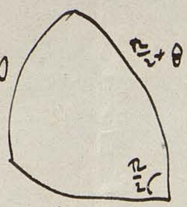
105





$\cos\alpha = -\cos\psi \sin\theta$



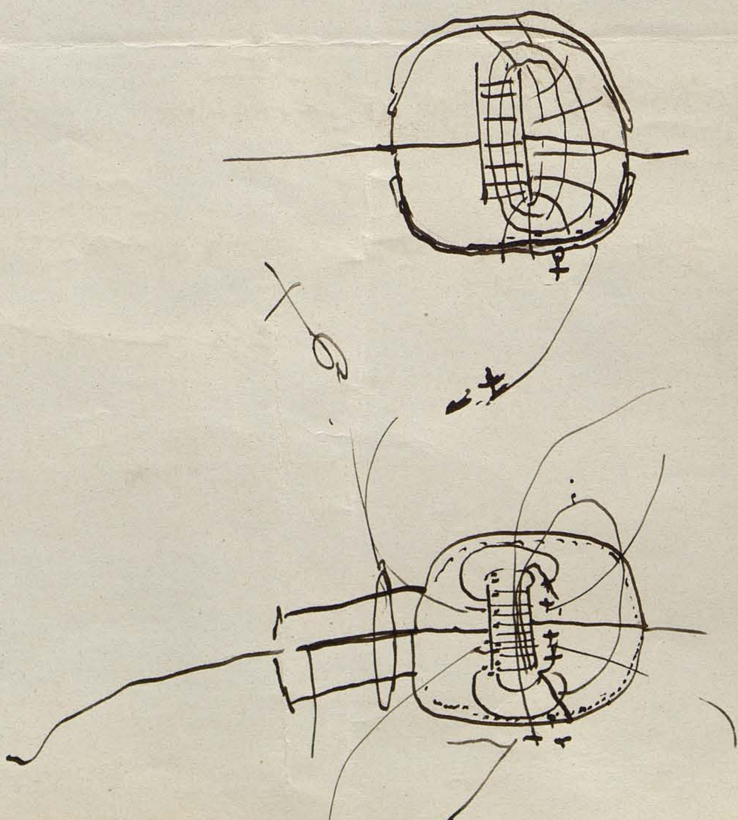


$\cos\alpha = \sin\psi \sin\theta$

$$A p \frac{dp}{dt} + C q \frac{dr}{dt} = Mgl \sin\theta \overbrace{(p \sin\psi + q \cos\psi)}^{\frac{d\theta}{dt}}$$

$$C \frac{dr}{dt} + A \left(\frac{dq}{dt}\sin\psi - \frac{dp}{dt}\cos\psi\right) + \left(\frac{A-C}{2}\right)\overbrace{(p \sin\psi + q \cos\psi)}^{\frac{d\theta}{dt}} = 0$$

~~[illegible] $(p \sin\psi + q \cos\psi)$~~



$x_1 = x \cos\varphi - y \sin\varphi$

$y_1 = x \sin\varphi + y \cos\varphi$

$z_1 = z$

$\dot{x}_1 = \dot{x}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi - x\omega\sin\varphi - y\omega\cos\varphi$

$\dot{y}_1 = \dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi + x\omega\cos\varphi - y\omega\sin\varphi$

$$T = m\left[\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2} + (x^2+y^2)\frac{\omega^2}{2} + (x\dot{y} - y\dot{x})\omega\right]$$

$\frac{\partial T}{\partial x} = m(\omega^2 x + \omega\dot{y})$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial y} = m(\omega^2 y - \omega\dot{x})$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \omega y)$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \omega x)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} + \omega^2 x + y\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} + \omega^2 y - x\frac{d\omega}{dt} - 2\omega\frac{dx}{dt}$$

$\frac{d^2z}{dt^2}$ - -

$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\omega(v\sin\varphi + w\cos\varphi)$

$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -2\omega u\sin\varphi$

$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -g - 2\omega u\cos\varphi$

$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -a^2\xi + 2b\frac{d\eta}{dt}$

$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -a^2\eta - 2b\frac{d\xi}{dt}$

$\xi = A\cos(n_1 t + B) + C\cos(n_2 t + D)$

$\eta = \quad \sin \qquad - \sin$

$n_1 = \sqrt{a^2+b^2} - b \qquad n_2 = \sqrt{a^2+b^2} + b$

$\xi = A[\cos(a-b)t + \cos(a+b)t] = 2A\cos bt\cos at \qquad \mp a-b \qquad \mp a+b$

$\eta = \sin \quad - \sin \qquad = -2A\sin bt\cos at$

$\frac{d\xi}{dt} = C\cos\xi\frac{d\eta}{dt} \qquad \frac{d\eta}{dt} = -2\omega\cos\xi\frac{d\xi}{dt}$

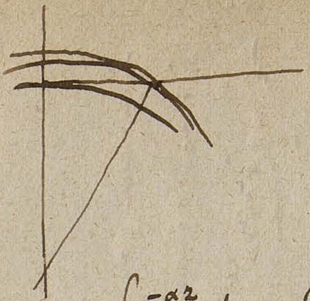
$\xi = \frac{v_0}{c}[1 - \cos(ct)] + \frac{v_0}{c}\sin(ct)$

$\eta = \frac{v_0}{c}[\cos(ct) - 1] + \frac{v_0}{c}\sin ct$

$(\xi - \frac{v_0}{c})^2 + (\eta + \frac{v_0}{c})^2 = \frac{2v_0^2}{c^2}$

$c = 2\omega\sin\xi$

18440. 0.566



$$\frac{dz}{ds} = \sin\varphi = \frac{s}{a+z}$$

$$z = y^2$$
$$dz = 2y\,dy$$

$$dz \neq \frac{s\,ds}{a}$$

$$\int e^{-\alpha z}\,dz = \frac{1}{\alpha}$$

$$s^2 = (a+z)^2 - a^2 = 2az + z^2$$

$$s = \sqrt{2az}$$

$$\int e^{-\alpha z}\,ds = a\int \frac{e^{-\alpha z}\,dz}{s} = \sqrt{\frac{a}{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{2a}\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}\,dy = \sqrt{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\sqrt{6{,}36{,}00} = 250 \text{ km.}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 10 \text{ km.}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} + \cos\varphi \frac{dz}{dt}\right) + \lambda y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda(z+l)$$

$$H = W - 2U$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = q$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} - 2\frac{\partial U}{\partial x} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(T-U)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = q$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = q$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{q}$$

$$d\varphi = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}U(r) + h - \frac{k^2}{r^2}}}$$

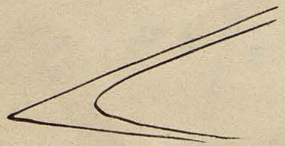
$$k = r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

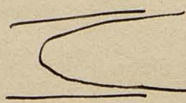
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{m}U(r) + h$$

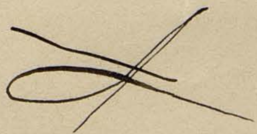
$$U(r) = -\frac{c}{r^2}$$

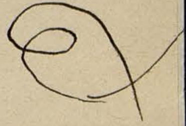
$$d\varphi = \frac{k\,dr}{r^2\sqrt{h - \frac{1}{r^2}\left(k^2 - \frac{2c}{m}\right)}} = \frac{-k\,dx}{\sqrt{h - (\ \ )x^2}} = - k \arccos \frac{\sqrt{A}}{r}$$

$$r = \frac{r_0}{\cos\varphi\,1.}$$

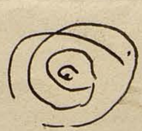








$$k^2 = \frac{2c}{m} : \quad \varphi = \frac{k}{h}\frac{1}{r}$$



$$\lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = \varphi$$

$$r = \frac{2r_0}{e^{k'\varphi} + e^{-k'\varphi}}$$

$$h = 0$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = h - \frac{k^2}{r^2} - \frac{2}{m}U(r)$$

$$2\frac{d^2r}{d\varphi^2} = +\frac{2k^2}{r^3} + \frac{2}{m}F(r)$$

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = k'$$

$$F = \mu u^n = \frac{\mu}{r^n}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{\mu}{h^2}u^{n-2} - u$$

$$u = c(1 + x)$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = -1 + \frac{\mu\,c^{n-3}}{h^2}\left[1 + (n-2)x + \frac{(n-2)(n-3)}{2}x^2 \ldots\right]$$

$$h^2 = \mu c^{n-3}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + x = (n-2)x + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)x^2 \ldots$$

$$x = M\cos p(\theta + \alpha)$$

$$(1 - p^2)M\cos p(\theta + \alpha) = (n-3)M\cos p(\theta + \alpha)$$

$$p^2 = 3 - n$$

$$p = \frac{n}{r}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v^2$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} = -\beta$$

$$\frac{1}{v} = \beta t + \alpha = \frac{dt}{dx}$$

$$dx = \frac{dt}{\alpha + \beta t}$$

$$x = \frac{1}{\beta}\log(\alpha + \beta t)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \beta v^2$$

$$\frac{dv}{g - \beta v^2} = dt \quad \Big\| \quad \lg \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{\beta}}{\sqrt{g} - v\sqrt{\beta}} = t + \alpha$$

$V.$

$$y = \overset{c \sin\alpha\, t}{~~~~} + \frac{g t^2}{2}$$

$$x = c\, t \cos\alpha$$

$$\dot{y} = c \sin\alpha + gt$$

$$\dot{x} = c \cos$$

$$V^2 = c^2 - gy$$

$$V = \sqrt{c^2 - gy}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-g\,\frac{dy}{dt}}{\sqrt{c^2 - gy}}$$



a^2

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

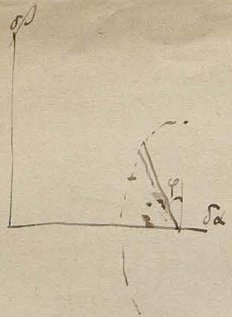
$$x = a\varepsilon + \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{a\varepsilon + (a\varepsilon^2 + \frac{b^2}{a})\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{a(\varepsilon+\cos\varphi)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$y = \frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\left(\frac{\varepsilon+\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\sin^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = (1+\varepsilon\cos\varphi)^2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (1-\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \varepsilon^2\sin^2\varphi = 1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi$$



obrót $\delta\alpha$ zmienia: $\delta z = y\,\delta\alpha$ $\quad \delta x = 0 \quad \delta y = -z\,\delta\alpha$

ogólnie $\delta z = r\,\delta\alpha$. $\delta y = y\,\delta\alpha$

obrót $\delta\beta$: $\quad \delta z = -x\,\delta\beta$

$\delta y = 0$

$\delta x = z\,\delta\beta$ $\quad$ właściwie $(z + \delta z)\,\delta\beta$ ale $\delta z\,\delta\beta$ pominąć, więc dowolnie czy najpierw $\delta\alpha$ czy $\delta\beta$

wektorów zatem: $\quad \delta x = z\,\delta\beta$

$\delta y = -z\,\delta\alpha$

$\delta z = y\,\delta\alpha - x\,\delta\beta$ $\Big\} = 0$ dla punktów których $\left\{ \frac{y}{x} = \frac{\delta\beta}{\delta\alpha},\ z = 0 \right.$



więc obrót koło tej osi zastępuje oba koła

wielkość obrotu? Np. dla punktów na osi X

$\delta z = -x\,\delta\beta$

$= r\,\delta\gamma = x \cdot \frac{\delta\beta}{\sqrt{\delta\beta^2 + \delta\alpha^2}}\,\delta\gamma$

$\therefore \quad \delta\gamma = \sqrt{\delta\beta^2 + \delta\alpha^2}$

więc konstrukcja ~~~~ dodawania geometrycznego

(ale tylko dla obrotów nieskończ. małych!)

ogólnie $\frac{dx}{dt} = z\frac{d\beta}{dt} - y\frac{d\gamma}{dt}$

$\frac{dx_\kappa}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + z_\kappa \frac{d\beta}{dt} - y_\kappa \frac{d\gamma}{dt}$

$\frac{d}{dt}\sum m_\kappa \left(x_\kappa \frac{dy_\kappa}{dt} - y_\kappa \frac{dx_\kappa}{dt}\right) = \sum (x_\kappa Y_\kappa - y_\kappa X_\kappa)$

$\sum m_\kappa r_\kappa^2 \left(\frac{d\varphi_\kappa}{dt}\right)$

$\frac{d\varphi_\kappa}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$

$\frac{d}{dt}\left(K_z \frac{d\varphi}{dt}\right) = R$

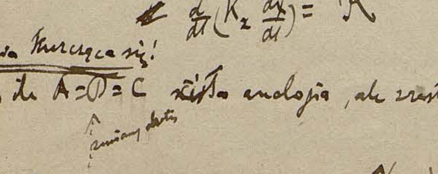
$\sum m_\kappa \frac{d^2 x_\kappa}{dt^2} = \sum X_\kappa$

$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X$

niezal. obrót. i postęp.

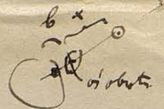
<u>Ziemia kręcąca się!</u>

o ile $A = B = C$ ścisła analogia, ale zresztą różnice (np. o różnych ABC wskazujące w ogólności zmianę położenia osi obrotu)



Autonom

$$K = K_0 + k_0 + x^2 m$$



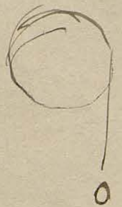
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K}{gMa}}$$

~~$a b = \delta$~~ ~~$M a = m x$~~

~~$\delta = M$~~

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K_0 + k_0 + x^2 m}{Mb - mx}\,\frac{(M+m)}{(M+m)g}}$$

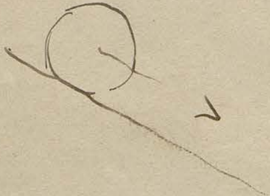
$$a = \frac{Mb - mx}{M+m}$$



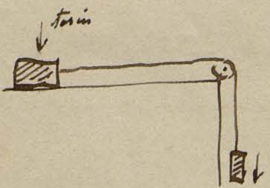
$$K\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = aF$$

$$K\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \dots = 0$$

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = mg - F$$



z zasady energii kinet.





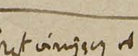
„Wackler"

W wykładzie systemat. zebrać wzory dla układów o 1 stopniu swobody: ~~wystarczy~~ (o ile siły potencjalne) zasada energii

dla 2 (lub 3) stopni swobody: zasada momentów

energia całkowita = postęp. (środka masy) + obrot.

Pręt wirujący w wstawce



$$K\Omega + m r^2 \omega = \text{const}$$

$$m r \omega^2 = \frac{c}{r^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{r^3}}$$

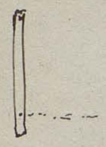
$$K\Omega + m\sqrt{r} = \text{const}$$

$$(\Omega - \omega) = \text{const} - \frac{\alpha}{a}\sqrt{r} - \frac{\beta}{\sqrt{r^3}} = 0$$

$$\alpha\rho + \frac{\beta}{\rho^3} = c$$

---

1). Wahadło balistyczne ~~$Kp + ml\dot{v} = mlv_0$~~ $\qquad \varphi = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$



$$Kp = Fl = m\dot{v}l$$

$$Kp = ml(v_0 - v)$$

$$\downarrow = lp$$

$$p = \frac{mlv_0}{K + ml^2}$$

Fleximati [illegible]:

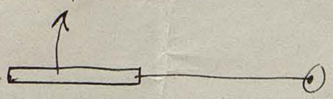
$$Kp + mlv = \text{const} = mlv_0$$

$$\downarrow \; a\frac{2\pi}{T}$$

$$v_0 = v + \frac{2\pi a K}{ml}$$

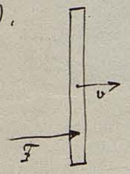
---

2). Pręt przyciągany, w[illegible] nagle urywa się, jaki ruch?



---

3).



Siła chwilowa ⊥ („kiczka")

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$Mv = \int F dt$$

$$\frac{d}{dt}(Kp) = aF$$

$$Kp = a\int F dt$$

$$K = \frac{l^3}{12}$$

$$aMv = Kp$$

$$p = \frac{a\,v \cdot 12}{l^2}$$

~~[illegible] jeśli $a = \frac{l}{...}$~~

~~$p = \frac{...v}{l}$~~

czy górna część pręta pójdzie naprzód czy wstecz?

$$pl = v$$

$$a = \frac{l}{12} \quad \text{albo większe, wtedy}$$

Jeśli siła F powstaje z uderzenia masy m

1). sprężyste uderzenie: ~~[illegible]~~ $m\frac{c^2}{2} = M\frac{v^2}{2} + \frac{Kp^2}{2} = Mv^2 + \frac{a^2M^2v^2}{K}$

$$Mv^2 = \frac{mc^2}{1 + \frac{a^2M}{K}}$$

2). uderzenie niesprężyste

$$mac = \text{~~[illegible]~~}\; Kp + ma(ap + v) = \text{~~[illegible]~~}$$

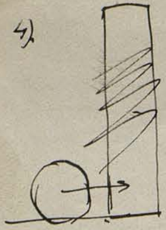
$$= mav + (K + ma^2)\frac{aMv}{K}$$

~~$v = \ldots$~~

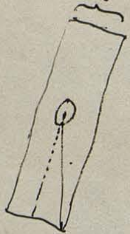
$$v = \frac{mc}{m + \frac{M}{k}}$$

4) „Kręgle" czy przewróci? Przyjmujemy że podstawa zupełnie gładka

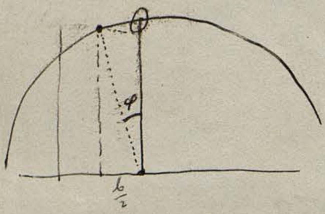
Spryszcie



przewróci jeśli kinetyczna energia ruchu obrotowego $> \frac{Mg}{2}\left[\underbrace{\sqrt{l^2+b^2}}_{k} - l\right]$



5) ~~Dynamika~~ Wahania takiego ciała?



$$K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Mgk \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{Mgk}{K}\varphi$$

$$\varphi = a\, e^{t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}} + b\, e^{-t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}}$$

$t=0: \quad \varphi = \varphi_0$

$\dot{\varphi} = 0$

~~$\varphi = \varphi_0\left[e^{t\sqrt{\frac{Mgk}{K}}} - 1\right]$~~

~~$\sqrt{\frac{K}{Mgk}} \log\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+1\right) = t = \sqrt{\frac{K}{Mgk}}$~~

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0 &= a+b\\ 0 &= a-b\end{aligned}\right\} a = b = \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2}\left(\underbrace{e^{\alpha t}}_{=x} + e^{-\alpha t}\right) = \frac{\varphi_0}{2}\left[1+\alpha t+\frac{\alpha^2 t^2}{2} + 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}\right]$$

$$= \varphi_0\left[1+\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right]$$

~~$\frac{2\varphi}{\varphi_0} = x + \frac{1}{x}$~~

~~$x^2 - 2x\frac{\varphi}{\varphi_0} + 1 = 0$~~

~~$x = \frac{\varphi}{\varphi_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2 - 1} = 1+\delta \pm \left[1+2\delta+\delta^2-1\right]^{1/2}$~~

~~$= \frac{\varphi}{\varphi_0}\left[1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^2}\right] \qquad = 1+\delta \pm \sqrt{2\delta+\delta^2}$~~

~~$= \frac{\varphi}{\varphi_0}\left[1 \pm \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^2\right)\right]$~~

~~$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1+\delta$~~

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}-1\right)}$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1+\delta$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2\delta}$$

$$= \sqrt{\frac{2Mgk}{K}}\,\delta$$

więc ani śladu izochronizmu

τ zależy od amplitudy δ

Zasadnicze równanie, ~~ważne dla~~ odniesione do stałych układu spółrzędnych ~~kierunków osi~~

$$\frac{dZ}{dt} = M \qquad Z = \sum m[v[\bar{u}\, v]]$$

Do określenia $\frac{dZ}{dt}$: wartości Z w dwóch chwilach

Jeśli ogólnie jakikolwiek wektor Z zmienia się po części wskutek zmiany położenia swej wewnątrz ciała ($\frac{dZ'}{dt}$), po części wskutek obrotu ciała ($V \bar{u} Z'$)

w tem Z' jest odniesione do ciała

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ'}{dt} + V \bar{u} Z' = M$$

$$Z' = iAp + jBq + kCr$$

$$\frac{dZ'}{dt} + V\bar{u} Z' = 0$$

$$\left(\bar{u}\, \frac{dZ'}{dt}\right) = 0 = \left(\frac{d\bar{u}}{dt} Z'\right) \therefore (\bar{u} Z') = const$$

$$\left(Z' \frac{dZ'}{dt}\right) = 0 \quad \therefore Z'^2 = const$$

~~rzut Z' na oś obrotu = const~~

rzut prędkości osi obrotu na kierunek Z' = const

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} K_x\right) = A p \cos AX + B q \cos BX + C r \cos CX$$

$$\frac{d}{dt}\left[\quad\right] = A \frac{dp}{dt} \cos AX + B \frac{dq}{dt} \cos BX + C \frac{dr}{dt} \cos CX$$

$$+ A p \sin AX \frac{d\,AX}{dt} - \cdots$$

$$\frac{d(AX)}{dt} = q \cos BX + r \cos CX$$

$$= .$$

$AX = 0$

$BX = CX = \frac{\pi}{2}$

$$\varphi = A \frac{dp}{dt} - B q \overbrace{\frac{d\,BX}{dt}}^{=r} - C r \overbrace{\frac{d\,CX}{dt}}^{=-q}$$

~~$\frac{d}{dt} L = M$~~

$$M = \Sigma [v\, \gamma] = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\Sigma m \left[v \frac{dv}{dt}\right]\right]}_{L} = \Sigma m [v\, v] = \Sigma m [v [u\, v]]$$

$$L = i A p + j B q + k C r$$

$$u = i p + j q + k r$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL'}{dt} + V u L' =$$

$$A \frac{dp}{dt} - B$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}$$

L dodaje się w sposób geometryczny ponieważ

$$u_1 + u_2 = u_3$$

$$L_1 + L_2 = L_3$$

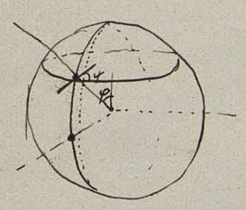
Foucault 1851

Obracanie zwierciadła kolistego (drążonego) w przeciwnych kierunkach ; różnica obiegu

Varum : zawieszenie Cardanego wykonanie z Kamerlingh Onnes z uwzględ. zbocz.

Gyroskop

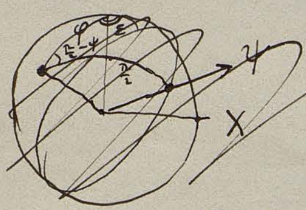
Föppl Elektromotor zawieszony na 3 drutach

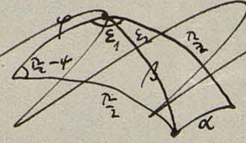


$d(K_p) = K\Omega(\cos\alpha - \cos\psi) = -K\Omega \sin\psi\, \omega \cos\varphi\, dt = M\, dt$

$\alpha = \psi + \omega \cos\varphi\, dt$

$\cos\alpha = \cos\psi - \sin\psi \cdot \omega \cos\varphi\, dt$



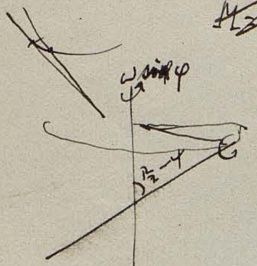


$\cos\alpha = \cos\beta \cos\frac{\pi}{2} - \sin\beta \sin\frac{\pi}{2} \cos\varepsilon_2$

$\cos\alpha = -\sin\beta \cos\varepsilon_2$

$\cos\beta = \cos\varphi \cos\frac{\pi}{2}$

~~$M = K\Omega\omega \sin\psi \cos\varphi$~~



$K\Omega\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2} + \omega \sin\varphi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) dt\right] - \cos\frac{\pi}{2}\right\} = M\, dt$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\omega \sin\varphi \cos\psi\, dt}$

$M = K\Omega\omega \sin\varphi \cos\psi$ stimmt

aż do 8° dewiacji !!

sprawy zaś ... spróbować odkształcenia ... układu obracanego; też przyspiesz. nasze układu [illegible] (obracanego względem ciał ?)

Relativitätsprinzip.

1). $f = m r \omega^2$ średnio wydrażone

teraz poczyna działać siła F_p taka że ω', r', r'' małe

[illegible] się powolna zależnie od tego [illegible] f zmieniamy może się z powolnością lub zmniejszyć

~~$f = m r \omega^2$~~

Praca przez siłę F_p: $dW = \frac{m}{2} d(r^2\omega^2) + f\,dr = m r^2 \omega\, d\omega + 2m\omega^2 r\,dr$

$$\frac{dW}{I} = d \log (r^4 \omega^2)$$

Proces kołowy

1). Siła F_p wykonuje pracę $W_1 = \int f\,dr$ przy tym f tak się reguluje że zawsze $= m r \omega^2 + \delta$ I_1 niezmienione

$r^2\omega^2 = const$ izot.

2). Odr. przy zwiększaniu, zmniejszając f trochę rosnąć będzie r adiabat.

$f = r\omega^2 = const$

praca $f \int dr = I_2 - I_1$

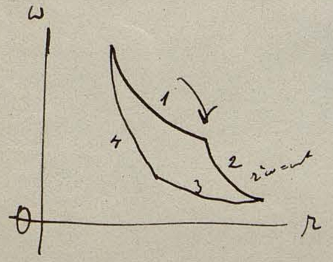
$r^2\omega^2 = const$ izot.

3). Siła F_p przeciwdziałająca wykonuje pracę $W_2 = \int f\,dr$ I_2 stałe

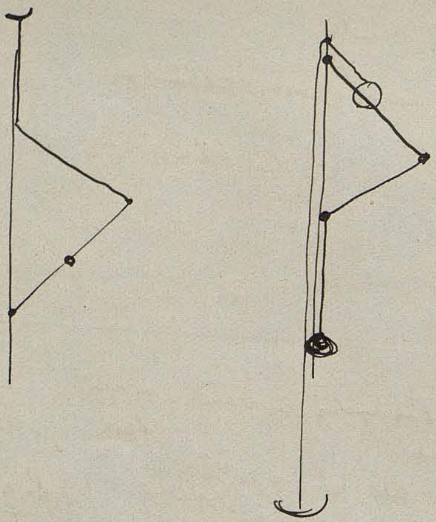
adiabat $f = r\omega^2 = const$

4). Odr. siły

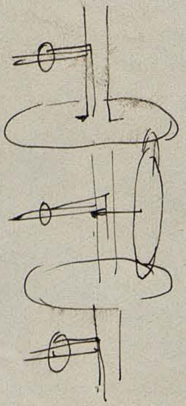
Cała praca wykonana $W_1 - W_2$



Monocykl o dwóch parametrach

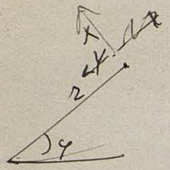


Otcykl



$x \ldots r$ $\quad$ $y = z = 0$

$p = q = 0 \quad r = \dot\varphi$



$$R = m(\ddot r - \dot\varphi^2 r)$$

$x = \theta \quad y = \ldots \quad z = 0$

$r = \dot\varphi$

$p = q = 0$

$$F_\perp =$$

~~$m \ldots \dot\varphi \ldots$~~

$$m\,(2\dot\varphi\,\dot y + \ddot\varphi\, y) = \frac{d}{dt}\, m(\dot\varphi^2 y)$$

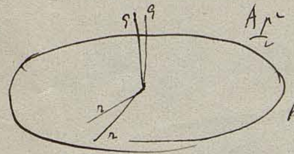
$y \quad X = m\ddot x + 2q(\dot z - r\dot y) + (\dot q z - \dot r y) - (r^2+q^2)x - p(rz+qy)$

$x \quad$ ~~$Y = m\ddot y + 2q(\dot z - r\dot y) + (\dot q z - \dot r y) - r^2$~~

$$m\ddot y + 2(r(\dot x - p\dot z) + \dot r x - \dot p z - (p^2+r^2)y - q(px + rz)$$

$$\Sigma(Xy - xY) = \frac{d}{dt}\,\Sigma m(y\dot x - x\dot y) +$$

$= 0$



$$\frac{A p^2}{2} + \frac{B q^2}{2} + \frac{C r^2}{2}$$

$$\frac{A p^2}{2} + \frac{B(q \ldots + r \sin p\,dt)^2}{2} + \frac{C(r \ldots - q \sin p\,dt)^2}{2}$$

$$B q\, r\, p\, dt \quad - C\, r\, q\, p\, dt$$

$\dot\varphi = p$

$\varphi = p\,dt \qquad \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = (B - C)\, q\, r$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = A\frac{dp}{dt} - (B-C)\, q\, r$$

Współrzędne ~~Funkcję~~ cykliczne takie które nie wchodzą w L

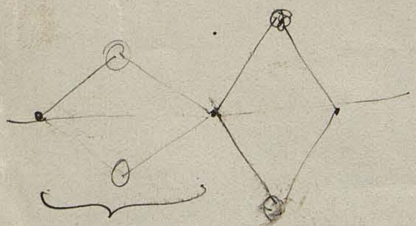
$$\frac{\partial L}{\partial k} = 0$$

powoli zmieniany parametr k

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial k'} = 0$$

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right)$$

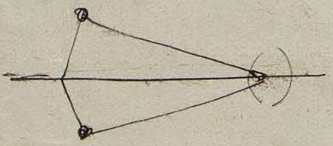
$$K = -\frac{\partial L}{\partial k}$$



$$L = 2ma^2 \sin^2\varphi \cdot \omega^2 + \frac{m}{2} a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2m\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\omega^2 + \ldots$$

$$x = 2a\cos\varphi$$

$$X = -\frac{\partial L}{\partial x} = m x \cdot \omega^2$$



$$x = a\cos\varphi + b$$

$$\bar{L} = 2m\left(1 - \frac{(x-b)^2}{4}\right)\omega^2$$

$$X = m(x-b)\omega^2$$ tak jak sprężyna



$$L = \frac{m r^2 \omega^2}{2} + \frac{m \dot{r}^2}{2}$$

$$\bar{F}_R = m(\ddot{r} - r\omega^2)$$

$$\bar{F}_\varphi = m(r^2\dot{\omega} + 2r\dot{r}\omega)$$

jeżeli ω duże, zmiany powolne = $\bar{F}_R = -m r \omega^2$

~~$\bar{F}_\varphi = 2 m r \dot{r}$~~

tak jak siła [illegible]

$K\Omega + k\omega + M$

$t=0: \quad \dot{\xi} = 0$

[illegible] : [illegible] $E \sim t^3$

$$\dot{\xi} = 2\omega \sin\varphi\, \eta$$

$$\dot{\zeta} = -gt + 2\omega\cos\varphi \cdot \eta$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -2\omega\,(2\omega\sin\varphi\,\eta - gt\cos\varphi + 2\omega\cos\varphi\,\eta)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega\cos\varphi\, g t^2$$

$$\eta = \frac{\omega}{3}\cos\varphi\, g t^3$$

$$\dot{\zeta} = -gt + \frac{2}{3}\omega^2\cos^2\varphi\, g t^3$$

$$\zeta - \zeta_0 = -\frac{gt^2}{2}$$

$$\dot{\xi} = \frac{2}{3}\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\, g t^3$$

$v = v_0 + V \omega r$

~~$v = v_0 + V \dot{\omega} r + V \omega \dot{r}$~~ ~~$\dot{r} = V \omega r$~~

$V \omega\, V \omega r =$

$v_x = zq - yr + \frac{dx}{dt}$

$v_y =$

$v_z =$

$T = \frac{m}{2}(v_x^2 + \dots) = \frac{1}{2} m\left[\dot{x}^2 + \dots \quad + 2\dot{x}(zq - yr) + \dots \quad + (zq - yr)^2 \dots\right]$

$X = m\left[\frac{d}{dt}\left[\dot{x} + (zq - yr)\right] - r\dot{y} + q\dot{z} - r(xr - zp) + q(yp - xq)\right]$

$X = m\left[\ddot{x} + 2q\dot{z} - 2r\dot{y} + z\dot{q} - y\dot{r} - x(q^2 + r^2) + zpr + pqy\right)$

Coriolis

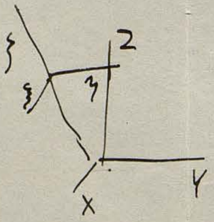
~~$\ddot{x} = \frac{X}{m} + \omega^2 x + \dots$~~ ~~$\ddot{w} + 2V\dots$~~

$p = q = 0 \quad r = \omega$

$-mJ_x = 2m\omega\dot{y}$ $m\ddot{x} = X + 2m\omega\dot{y}$

$-mJ_y = -2m\omega\dot{x}$ $m\ddot{y} = Y - 2m\omega\dot{x}$

$mJ_z = 0$ $m\ddot{z} = Z$



~~$x = \xi \sin\varphi + \zeta \cos\varphi$~~

~~$y = \eta$~~

~~$z = -\xi\cos\varphi + \zeta\sin\varphi$~~

$\xi = x\sin\varphi - z\cos\varphi$

$y = \eta$

$\zeta = x\cos\varphi + z\sin\varphi$

$\ddot{\xi} = 2\omega\sin\varphi \frac{d\eta}{dt}$

$\ddot{\eta} = -2\omega(\dot{\xi}\sin\varphi + \dot{\zeta}\cos\varphi)$

$\ddot{\zeta} = -g + 2\omega\cos\varphi\,\dot{\eta}$

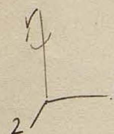
Np. $t=0$ $\dot{x} = c \quad \dot{\eta} = 0 \quad \zeta = 0$

$\dot{\eta} = -2\omega c \sin\varphi \cdot t$

$\eta = -2\omega c \sin\varphi \frac{t^2}{2}$ ..

[illegible] W   [illegible] N
N   E
E   S
S ...   W

$v_x = \dot a + \dot x + qz - ry$



$v_y = \dot b + \dot y + rx - pz$

$v_z = \dot c + \dot z + py - qx$

$$L = \frac{m}{2}\Big[\dot a^2 + \dot b^2 + \dot c^2 + \dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 + 2(\dot a \dot x + \dot b \dot y + \dot c \dot z) + (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2$$
$$+ 2(\dot a + \dot x)(qz - ry) + \dots \Big]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\left[\dot x + \dot a + (qz - ry)\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\left[(rx - pz)r - (py - qx)q + (\dot b + \dot y)r - (\dot c + \dot z)q\right]$$

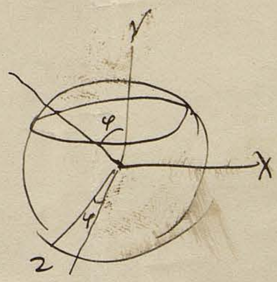
$$m\Big[\ddot x + \ddot a + 2\underbrace{(q\dot z - r\dot y)}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{(\dot q z - \dot r y)}_{\text{Coriolis}} - \dot b r + \dot c q - (r^2 + q^2)x - p(rz + qy)\Big] = X$$

$p = r = 0 \quad q = \omega \quad \dot a = \dot b = \dot c = 0$

$\ddot x = \frac{X}{m} + 2\omega \dot y + \omega^2 x$

$\ddot y = \frac{Y}{m} - 2\omega \dot z + \omega^2 y$

$\ddot z = \frac{Z}{m}$



$\ddot x = \frac{X}{m} - 2\omega \dot z + \omega^2 x$

$\ddot y = \frac{Y}{m}$ ~~$+ 2\omega\dot z + \omega^2 y$~~

$\ddot z = \frac{Z}{m} + 2\omega \dot x + \omega^2 y$

$\ddot \xi = \ddot x$

$\ddot \eta = \ddot y \cos\varphi + \ddot z \sin\varphi$

$\ddot \zeta = \ddot y \sin\varphi - \ddot z \cos\varphi$

$x = \xi$ | $\xi = x$

$y = \eta\cos\varphi - \zeta\sin\varphi$ | $\eta = y\cos\varphi + z\sin\varphi$

$z = \eta\sin\varphi + \zeta\cos\varphi$ | $\zeta = y\sin\varphi - z\cos\varphi$

$\ddot \xi = \frac{X}{m} + 2\omega\dot y + \omega^2 x = \frac{X}{m} + 2\omega(\dot\eta\cos\varphi - \dot\zeta\sin\varphi) + \omega^2\xi$

$\ddot \eta = \frac{Y}{m}$ ~~$\dots$~~ $H - 2\omega\cos\varphi$ ~~$(\dots)$~~

$= H - 2\omega\left[\cos\varphi(\dot\eta\cos\varphi - \dot\zeta\sin\varphi) + (\dot\eta\sin\varphi + \dot\zeta\cos\varphi)\sin\varphi\right] = H - 2\omega\dot\eta$

$\ddot \zeta = \frac{Z}{m}$ ~~$\sin$~~

$\ddot \eta = \ddot y\cos\varphi + \ddot z\sin\varphi$
$\quad - \dot y\omega\sin\varphi + 2\omega\cos\varphi$

$\ddot \eta = \ddot y\cos\varphi + \ddot z\sin\varphi$
$\quad - 2\dot y\omega\sin\varphi + 2\dot z\omega\cos\varphi$
$\quad - y\omega^2\cos\varphi + z\omega^2\sin\varphi$

$\varphi = 0 \quad \ddot\eta = \ddot y + 2\dot z\omega - y\omega^2$

$$\ddot{\xi} = \frac{\Xi}{m} - 2\omega \dot{z} = \frac{\Xi}{m} - 2\omega(\dot{\eta}\sin\varphi + \dot{\zeta}\cos\varphi)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{H}{m} + 2\omega\dot{x}\sin\varphi = \frac{H}{m} + 2\omega\sin\varphi\,\dot{\xi}$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{Z}{m} - 2\omega\dot{x}\cos\varphi = \frac{Z}{m} - 2\omega\cos\varphi\,\dot{\xi}$$

$H = -gm. \quad \Xi = Z = 0$

$$\ddot{\xi} = -2\omega(\dot{\eta}\sin\varphi + \dot{\zeta}\cos\varphi)$$

$$\ddot{\eta} = -g + 2\omega\dot{\xi}\sin\varphi \qquad\qquad \dot{\eta} = -gt + 2\omega\xi\sin\varphi + \beta$$

$$\ddot{\zeta} = -2\omega\dot{\xi}\cos\varphi \qquad\qquad \dot{\zeta} = -2\omega\xi\cos\varphi + \gamma$$

$$\ddot{\xi} = -2\omega\left[-gt\sin\varphi + \underbrace{2\omega\xi\sin^2\varphi + \beta\sin\varphi - 2\omega\xi\cos^2\varphi + \gamma\cos\varphi}_{=0}\right]$$

[illegible]

$$\dot{\xi} = \omega g \frac{t^2}{2}\sin\varphi$$

$$\xi = \frac{\omega g t^3}{3}\sin\varphi$$

$$\eta = -g\frac{t^2}{2}$$

$$\zeta = 0$$

Foucault:

$$\ddot{\xi} = -\alpha^2\xi - 2\omega\dot{\zeta}\cos\varphi$$

$$\ddot{\eta} = 0$$

$$\ddot{\zeta} = -\alpha^2\zeta + 2\omega\dot{\xi}\sin\varphi$$

$$\xi = A\cos(n_1 t + B) + C\cos(n_2 t + D) \qquad n_1 = \sqrt{a^2+\omega^2} - \omega \neq a - \omega$$

$$\zeta = A\sin(n_1 t + B) - C\sin(n_2 t + D) \qquad n_2 = \sqrt{a^2+\omega^2} + \omega \neq a + \omega$$

$t=0$ $\quad \xi = \xi_0 \quad \dot{\xi} = 0 \quad A n_1 \sin B = -C n_2 \sin D \quad B = D = 0$

$\zeta = 0 \quad \dot{\zeta} = 0 \quad A\sin B = C\sin D \quad A n_1 = C n_2$

$A n_1 \cos B = C n_2 \cos D$

$$\xi = A\left(\cos n_1 t + \frac{n_1}{n_2}\cos n_2 t\right)$$

$$\zeta = A\left(\sin n_1 t - \frac{n_1}{n_2}\sin n_2 t\right)$$

$B = D = 0$

$C = A$

$\xi = 2A\cos bt\cos at$

$\eta = -2A\sin bt\cos at$

$\frac{\xi}{\eta} = -\operatorname{tg} bt$

$\xi^2 + \eta^2 = 4A^2\cos^2 at$